

DS9 (version B)

Exercice (HEC 2011)

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.

Démonstration.

La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

□

b) Vérifier que 1 est une valeur propre de A et déterminer un vecteur-colonne propre associé.

Démonstration.

• On calcule :

$$A - 1 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

On remarque alors : $C_1 + C_2 + C_3 = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Ainsi $A - I_3$ n'est pas inversible.

On en déduit que 1 est valeur propre de A .

• Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$X \in E_1 \iff (A - I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 X \in E_1 & \stackrel{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2}{\iff} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} -2x + y = -z \\ y = z \end{cases} \\
 & \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} -2x & = -2z \\ & y = z \end{cases} \\
 & \stackrel{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}{\iff} \begin{cases} x & = z \\ & y = z \end{cases}
 \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / x = z \text{ et } y = z \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc :
 - × génératrice de E_1 ,
 - × libre, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_1 .

En particulier, un vecteur colonne propre associé à la valeur propre 1 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Commentaire

Le terme « vérifier » dans l'énoncé de la question peut faire penser que le concepteur s'attend à ce qu'on remarque que le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1. La réponse à cette question serait alors simplement :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

Cependant, comme la détermination exacte des sous-espace propre est demandé à la question suivante, il est plus efficace de répondre à cette question en déterminant E_1 . □

c) Calculer les valeurs propres de A et déterminer une base de \mathbb{R}^3 formée de vecteurs propres de A .

Démonstration.

- Déterminons les valeurs propres de A .
 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rg}(A - \lambda I_3) &= \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} \right) \\
 &\stackrel{\substack{L_1 \leftarrow 2L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3}}{=} \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \right) \\
 &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\lambda L_1}}{=} \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 0 & -2\lambda - 1 & 1 + 2\lambda \\ 0 & 1 + 2\lambda & 1 - 4\lambda^2 \end{pmatrix} \right) \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 0 & -2\lambda - 1 & 1 + 2\lambda \\ 0 & 0 & 2 + 2\lambda - 4\lambda^2 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \lambda \text{ valeur propre de } A &\Leftrightarrow (A - \lambda I_3) \text{ non inversible} \\
 &\Leftrightarrow -2\lambda - 1 = 0 \text{ OU } 2 + 2\lambda - 4\lambda^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \text{ OU } \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \text{ OU } (\lambda - 1) \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \text{ OU } \lambda = 1 \text{ OU } \lambda = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

On en déduit : $\operatorname{Sp} A = \{-\frac{1}{2}, 1\}$.

D'après la question précédente, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_1 .

- Déterminons $E_{-\frac{1}{2}}$, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $-\frac{1}{2}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
 X \in E_{-\frac{1}{2}} &\iff \left(A + \frac{1}{2}I_3\right)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \{ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \} \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow 2L_1}{\iff} \{ x + y + z = 0 \} \\
 &\iff \{ x = -y - z \}
 \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 E_{-\frac{1}{2}} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / x = -y - z \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} / (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
 &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

× génératrice de $E_{-\frac{1}{2}}$,

× libre, car elle est constituée de 2 vecteurs non colinéaires.

La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc une base de $E_{-\frac{1}{2}}$.

- Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :
 - × libre car elle est la concaténation de 2 familles libres associées à des sous-espaces propres distincts,
 - × telle que : $\text{Card} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$

On en déduit que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A .

Commentaire

En demandant une base de \mathbb{R}^3 (vecteurs lignes) formée de vecteurs propres de A (vecteurs colonnes), l'énoncé fait ici une confusion entre \mathbb{R}^3 et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On peut donc supposer qu'une telle confusion à cette question de la part d'un candidat n'aurait pas été sanctionnée. Cependant, il est crucial d'éviter à tout prix tout type de confusions d'objets dans une copie. \square

Dans la suite de l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.

On considère l'ensemble \mathcal{S}_n des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j} \geq 0$;
- A admet la valeur propre 1 et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur-colonne propre associé à cette valeur propre.

2. L'ensemble \mathcal{S}_n , muni des lois usuelles sur les matrices, est-il un espace vectoriel ?

Démonstration.

Montrons : $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \notin \mathcal{S}_n$.

$$0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \times X_0 = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \neq 1 \cdot X_0$$

Donc X_0 n'est pas un vecteur propre de $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ associé à la valeur propre 1.

D'où $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \notin \mathcal{S}_n$.

On en déduit que \mathcal{S}_n n'est pas un espace vectoriel.

Commentaire

- Remarquons bien ici la tournure de la question : on ne demande pas « Montrer que cet ensemble est un espace vectoriel », mais « Cet ensemble est-il un espace vectoriel ? ».
- L'attitude à adopter ici n'est donc pas d'essayer de montrer que cet ensemble est un espace vectoriel mais plutôt de montrer que **ce n'en est pas un**.

Commentaire

- Pour montrer qu'un ensemble F n'est pas un espace vectoriel, il faut trouver un contre-exemple à la définition d'espace vectoriel. Pour cela, on pourra, dans cet ordre :
 - × tester si $0 \in F$. Si ce n'est pas le cas, alors F n'est pas un espace vectoriel.
 - × trouver un vecteur $u \in F$, tel que $-u \notin F$.
 - × trouver deux vecteurs $(u, v) \in F^2$, tels que $u + v \notin F$ (ou tout autre combinaison linéaire non triviale de u et v).

□

3. Montrer que le produit de deux matrices de \mathcal{S}_n est une matrice de \mathcal{S}_n .

Démonstration.

Soit $(A, B) \in (\mathcal{S}_n)^2$.

- Montrons que les coefficients de AB sont positifs.

On note : $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. Alors :

$$AB = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

Or, comme $(A, B) \in (\mathcal{S}_n)^2$, on a :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0 \text{ et } b_{i,j} \geq 0$$

$$\text{Donc : } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \geq 0.$$

- Montrons que X_0 est un vecteur propre de AB associé à la valeur propre 1.

Comme $(A, B) \in (\mathcal{S}_n)^2$, X_0 est un vecteur propre de A et de B associé à la valeur propre 1. On obtient alors :

$$ABX_0 = A \times BX_0 = A \times X_0 = X_0$$

Donc X_0 est un vecteur propre de AB associé à la valeur propre 1.

On en déduit que \mathcal{S}_n est stable par produit.

□

4. Soit A un élément de \mathcal{S}_n et λ une valeur propre de A .

- a) Montrer qu'il existe un vecteur-colonne propre $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre λ , pour lequel il existe un entier k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, vérifiant $v_k = 1$ et pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $|v_i| \leq 1$.

Démonstration.

- Le réel λ est une valeur propre de A . Donc il existe $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . D'où :

$$\begin{cases} W \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ AW = \lambda \cdot W \end{cases}$$

On note alors $M = \max(|w_1|, \dots, |w_n|)$.

Comme $\{|w_1|, \dots, |w_n|\}$ est un ensemble fini, il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|w_k| = M$.

De plus, $W \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Donc $M \neq 0_{\mathbb{R}}$. D'où $w_k \neq 0_{\mathbb{R}}$

On pose alors :

$$V = \frac{1}{w_k} \cdot W$$

- Montrons que V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .
 - × Tout d'abord : $W \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $w_k \neq 0$. Donc $V \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.
 - × De plus :

$$AV = A \times \left(\frac{1}{w_k} \cdot W \right) = \frac{1}{w_k} \cdot AW = \frac{1}{w_k} \lambda \cdot W = \lambda \frac{1}{w_k} \cdot W = \lambda \cdot V$$

V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

- Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
 On rappelle que $M = \max(|w_1|, \dots, |w_n|)$. Alors

$$|v_i| = \left| \frac{w_i}{w_k} \right| = \frac{|w_i|}{M} \leq \frac{M}{M} = 1$$

De plus :

$$v_k = \frac{w_k}{w_k} = 1$$

On a bien montré qu'il existe V un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ tel que :

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |v_i| \leq 1 \\ \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, v_k = 1 \end{cases} . \quad \square$$

- b)** En déduire que l'on a : $|\lambda| \leq 1$ et $|\lambda - a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k}$.

Démonstration.

- On rappelle la formule suivante (utilisée en question 3.) : $\forall A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}, B = (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$,

$$AB = \left(\sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell} b_{\ell,j} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

Comme $AV = \lambda \cdot V$, on en déduit :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell} v_\ell = \lambda v_i$$

En particulier :

$$\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell} v_\ell = \lambda v_k = \lambda$$

- Par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \left| \sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell} v_\ell \right| \leq \sum_{\ell=1}^n |a_{k,\ell} v_\ell| = \sum_{\ell=1}^n |a_{k,\ell}| |v_\ell| \\ &\leq \sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell} |v_\ell| && (\text{car } A \in \mathcal{S}_n) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell} \times 1 && (\text{d'après la question 4.a}) \end{aligned}$$

- De plus : $AX_0 = X_0$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell} \times 1 = 1 \quad (*)$$

On en déduit : $|\lambda| \leq 1$

- Par ailleurs :

$$\lambda - a_{k,k} = \sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell} v_\ell - a_{k,k} = \sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell} v_\ell - a_{k,k} v_k = \sum_{\substack{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \neq k}} a_{k,\ell} v_\ell$$

Donc, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{k,k}| &\leq \sum_{\substack{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \neq k}} a_{k,\ell} |v_\ell| && (\text{car } A \in \mathcal{S}_n) \\ &\leq \sum_{\substack{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \neq k}} a_{k,\ell} && (\text{d'après la question 4.a}) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell} - a_{k,k} \\ &\leq 1 - a_{k,k} && (\text{d'après (*)}) \end{aligned}$$

$$\boxed{|\lambda - a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k}}$$

□

5. Montrer que si les éléments diagonaux d'une matrice A de \mathcal{S}_n sont tous strictement supérieurs à $\frac{1}{2}$, la matrice A est inversible.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$|\lambda - a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k}$$

Donc :

$$-(1 - a_{k,k}) \leq \lambda - a_{k,k} \leq 1 - a_{k,k}$$

$$\boxed{\text{D'où : } -1 + 2a_{k,k} \leq \lambda \leq 1}$$

- Ainsi, si les coefficients diagonaux de A sont tous strictement supérieurs à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i} > \frac{1}{2}$$

alors, en particulier : $a_{k,k} > \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Donc : } \lambda > 0.}$$

- On en déduit que 0 n'est pas une valeur propre de A , donc A est inversible.

$$\boxed{\text{Ainsi, si tous les coefficients diagonaux de } A \in \mathcal{S}_n \text{ sont strictement supérieurs à } \frac{1}{2}, \text{ alors } A \text{ est inversible.}}$$

□

Problème (HEC 2010)

- Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X , et $\text{Cov}(X, Y)$ la covariance de deux v.a.r. X et Y .
- Dans les parties I et III, la fonction de répartition et une densité d'une variable aléatoire X à densité sont notées respectivement F_X et f_X .
- **On admet** que les formules donnant l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes, ainsi que la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes, s'appliquent au cas de variables aléatoires à densité.
- Pour n entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes si pour tout n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) de réels, les événements $[X_1 \leq x_1], [X_2 \leq x_2], \dots, [X_n \leq x_n]$ sont indépendants.
- L'objet du problème est double. D'une part, montrer certaines analogies entre les lois géométriques et exponentielles, d'autre part mettre en évidence quelques propriétés asymptotiques de variables aléatoires issues de la loi exponentielle.
La partie II est indépendante de la partie I.
La partie III est indépendante de la partie II et largement indépendante de la partie I.

Partie I. Loi exponentielle

1. a) Rappeler la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$.

Établir pour tout n de \mathbb{N}^* la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

On pose alors $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ et pour tout n de \mathbb{N}^* $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

Démonstration.

- On note X une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(1)$. Alors une densité f_X de X est :

$$f_X : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

On en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt$ est convergente et vaut 1.

Comme f_X est nulle en dehors de $[0, +\infty[$, on obtient : $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.

- De plus :

× on remarque : $t^n e^{-t} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$. En effet :

$$\frac{t^n e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{n+2} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{par croissances comparées})$$

× par ailleurs : $\forall t \in [1, +\infty[$, $t^n e^{-t} \geq 0$ et $\frac{1}{t^2} \geq 0$.

× l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente.

- Enfin, comme la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, alors l'intégrale $\int_0^1 t^n e^{-t} dt$ est bien définie.

Finalement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente.

□

b) Soit n un entier de \mathbb{N}^* . À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} . En déduire la valeur de I_n en fonction de n .

Démonstration.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $B \geq 0$. On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(t) = t^n & u'(t) = n t^{n-1} \\ v'(t) = e^{-t} & v(t) = -e^{-t} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, B]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^B t^n e^{-t} dt &= [-t^n e^{-t}]_0^B + n \int_0^B t^{n-1} e^{-t} dt \\ &= -B^n e^{-B} + n \int_0^B t^{n-1} e^{-t} dt \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées : $\lim_{B \rightarrow +\infty} -B^n e^{-B} = 0$.

On en déduit, par passage à la limite quand B tend vers $+\infty$:
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = n I_{n-1}$.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : I_n = n!$.

► **Initialisation :**

D'après la question 1.a) : $I_0 = 1 = 0!$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $I_{n+1} = (n+1)!$).

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= (n+1) I_n && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= (n+1) \times n! && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!$.

□

Soit λ un réel strictement positif. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $\frac{1}{\lambda}$).

On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

2. Justifier les relations $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

Démonstration.

Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- si $T(\omega) = X_1(\omega)$, alors : $Z(\omega) = X_2(\omega)$. Ainsi :

× d'une part : $T(\omega) + Z(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$.

× d'autre part : $T(\omega) - Z(\omega) = X_1(\omega) - X_2(\omega) = Y(\omega)$.

De plus, comme on est ici dans le cas où $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_1(\omega)$, on obtient : $Y(\omega) \geq 0$.

D'où :

$$T(\omega) - Z(\omega) = Y(\omega) = |Y(\omega)| = |Y|(\omega)$$

- si $T(\omega) = X_2(\omega)$, alors : $Z(\omega) = X_1(\omega)$. Ainsi :

× d'une part : $T(\omega) + Z(\omega) = X_2(\omega) + X_1(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$.

× d'autre part : $T(\omega) - Z(\omega) = X_2(\omega) - X_1(\omega) = -Y(\omega)$.

De plus, comme on est ici dans le cas où $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_2(\omega)$, on obtient : $Y(\omega) \leq 0$.

D'où :

$$T(\omega) - Z(\omega) = -Y(\omega) = |Y(\omega)| = |Y|(\omega)$$

Finalement, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$T(\omega) + Z(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) \quad \text{et} \quad T(\omega) - Z(\omega) = |Y|(\omega)$$

On en déduit : $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |Y| = |X_1 - X_2|$.

□

3. a) Rappeler sans démonstration les valeurs de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}([X_1 \leq x])$, pour tout réel x .

Démonstration.

Comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors :

$$\mathbb{V}(X_1) = \frac{1}{\lambda^2} \text{ et } F_{X_1} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

□

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(Y)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. $X_1 + X_2$ et $Y = X_1 - X_2$ admettent une variance (et donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- Par linéarité de l'espérance :

× tout d'abord : $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$.

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \frac{2}{\lambda}$$

× ensuite : $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1 - X_2) = \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = 0$.

$$\mathbb{E}(Y) = 0$$

- Comme les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

- Comme les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes, par lemme des coalitions, les v.a.r. X_1 et $-X_2$ le sont aussi. Ainsi :

$$\mathbb{V}(X_1 - X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(-X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\text{D'où : } \mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_1 - X_2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

□

4. Déterminer pour tout réel z , $F_Z(z)$ et $f_Z(z)$. Reconnaître la loi de Z et en déduire $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X_1(\Omega) = [0, +\infty[$ et $X_2(\Omega) = [0, +\infty[$, alors : $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \in]-\infty, 0]$, alors $[Z \leq x] = \emptyset$ (car $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$). D'où :

$$F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

× si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}([Z \leq x]) = 1 - \mathbb{P}([Z > x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 > x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X_1 > x]) \times \mathbb{P}([X_2 > x]) && \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)} \\ &= 1 - (\mathbb{P}([X_1 > x]))^2 && \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont même loi)} \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(x))^2 \\ &= 1 - \left(1 - (1 - e^{-\lambda x})\right)^2 && \text{(d'après 3.a), car } x \geq 0 \\ &= 1 - e^{-2\lambda x} \end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } F_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-2\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(2\lambda)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

On en déduit : $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda)$.

D'où : $f_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\lambda e^{-2\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{2\lambda}$, $\mathbb{V}(Z) = \frac{1}{4\lambda^2}$.

□

5. a) Montrer que pour tout réel t , on a : $F_T(t) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda t})^2 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

Exprimer pour tout réel t , $f_T(t)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X_1(\Omega) = [0, +\infty[$ et $X_2(\Omega) = [0, +\infty[$, alors : $T(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
 - × si $x \in]-\infty, 0[$, alors $[T \leq x] = \emptyset$ (car $T(\Omega) \subset [0, +\infty[$). D'où :

$$F_T(x) = \mathbb{P}([T \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

- × si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \mathbb{P}([T \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 \leq x]) \times \mathbb{P}([X_2 \leq x]) && \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)} \\ &= (\mathbb{P}([X_1 \leq x]))^2 && \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont même loi)} \\ &= (1 - e^{-\lambda x})^2 && \text{(d'après 3.a), car } x \geq 0 \end{aligned}$$

Finalement : $F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-\lambda x})^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

- La fonction F_T est continue :
 - × sur $] - \infty, 0[$ en tant que fonction constante,
 - × sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$,
 - × en 0. En effet :

- d'une part : $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_T(x) = 0$
- d'autre part : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_T(x) = F_T(0) = (1 - e^{-\lambda \times 0})^2 = 0$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_T(x) = F_T(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_T(x)$.

La fonction F_T est donc continue sur \mathbb{R} .

- La fonction F_T est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

La fonction F_T est donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0.

La v.a.r. T est donc une v.a.r. à densité.

- Pour déterminer une densité f_T de T , on dérive sa fonction de répartition F_T sur les intervalles **ouverts** $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- × si $x \in] -\infty, 0[$, alors :

$$f_T(x) = F_T'(x) = 0$$

- × si $x \in]0, +\infty[$, alors :

$$f_T(x) = F_T'(x) = 2\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})$$

- × On choisit enfin : $f_T(0) = 0$.

Finalement : $f_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

□

- b)** Justifier l'existence de $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$. Montrer que $\mathbb{E}(T) = \frac{3}{2\lambda}$ et $\mathbb{V}(T) = \frac{5}{4\lambda^2}$.
 (on pourra utiliser des changements de variables affines)

Démonstration.

- D'après la question **2.** : $T = X_1 + X_2 - Z$. On en déduit que la v.a.r. T admet une variance (et donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(X_1 + X_2 - Z) \\ &= \mathbb{E}(X_1 + X_2) - \mathbb{E}(Z) && \text{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} && \text{(d'après 3.b) et 4.)} \\ &= \frac{4}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda} \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathbb{E}(T) = \frac{3}{2\lambda}$.
--

- Ensuite, comme la v.a.r. T admet une variance, elle admet un moment d'ordre 2. De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_T(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^2 f_T(t) dt && \text{(car } f_T \text{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[) \\ &= \int_0^{+\infty} t^2 \times 2\lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}) dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} t^2 \times \lambda e^{-\lambda t} dt - \int_0^{+\infty} t^2 \times 2\lambda e^{-2\lambda t} dt && \text{(par linéarité de l'intégrale)} \end{aligned}$$

Cette linéarité est bien licite car les intégrales en présence sont convergentes. En effet :

- × d'une part, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 \times \lambda e^{-\lambda t} dt$ est le moment d'ordre 2 de $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$,

- × d'autre part, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 \times 2\lambda e^{-2\lambda t} dt$ est le moment d'ordre 2 de $U \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(T^2) &= 2 \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(U^2) \\
 &= 2 \left(\mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2 \right) - \left(\mathbb{V}(U) + (\mathbb{E}(U))^2 \right) && \text{(par formule de Koenig-Huygens)} \\
 &= 2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) - \left(\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} \right) && \text{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \text{ et } U \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda)) \\
 &= \frac{4}{\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda^2} = \frac{7}{2\lambda^2}
 \end{aligned}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - (\mathbb{E}(T))^2 = \frac{7}{2\lambda^2} - \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{5}{4\lambda^2}$$

$$\mathbb{V}(T) = \frac{5}{4\lambda^2}$$

□

6. On note r le coefficient de corrélation linéaire de Z et T . Montrer que $r = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition du coefficient de corrélation : $r = \frac{\text{Cov}(Z, T)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)} \sqrt{\mathbb{V}(T)}}$.

- De plus :

$$\mathbb{V}(T + Z) = \mathbb{V}(Z) + 2 \text{Cov}(Z, T) + \mathbb{V}(T)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(Z, T) &= \frac{1}{2} (\mathbb{V}(Z + T) - \mathbb{V}(Z) - \mathbb{V}(T)) \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbb{V}(X_1 + X_2) - \mathbb{V}(Z) - \mathbb{V}(T)) && \text{(car } T + Z = X_1 + X_2) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{5}{4\lambda^2} \right) && \text{(d'après 3.b), 4. et 5.b)} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{4\lambda^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : Cov}(Z, T) = \frac{1}{4\lambda^2}.$$

- Enfin :

× d'une part, d'après 4. : $\sqrt{\mathbb{V}(Z)} = \sqrt{\frac{1}{4\lambda^2}} = \frac{1}{2\lambda}$.

× d'autre part, d'après 5.b) : $\sqrt{\mathbb{V}(T)} = \sqrt{\frac{5}{4\lambda^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2\lambda}$.

- On obtient :

$$r = \frac{\text{Cov}(Z, T)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)} \sqrt{\mathbb{V}(T)}} = \frac{\frac{1}{4\lambda^2}}{\frac{1}{2\lambda} \frac{\sqrt{5}}{2\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

□

7. a) Préciser $Y(\Omega)$ et $|Y|(\Omega)$.

Démonstration.

Les v.a.r. X_1 et X_2 sont toutes les deux de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Ainsi : $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = [0, +\infty[$.

Comme $Y = X_1 - X_2$, on en déduit : $Y(\Omega) = \mathbb{R}$.

Par définition de la valeur absolue, on obtient : $|Y|(\Omega) = [0, +\infty[$.

□

b) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X_2$.

Démonstration.

• Tout d'abord, on note : $V = -X_2$. Comme $X_2(\Omega) = [0, +\infty[$, alors :

$$V(\Omega) = (-X_2)(\Omega) =]-\infty, 0]$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

× Si $x \in]-\infty, 0]$, alors :

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}([V \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([-X_2 \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([X_2 \geq -x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X_2 \leq -x]) \quad (\text{car } X_2 \text{ est une v.a.r. à densité}) \\ &= 1 - F_{X_2}(-x) \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda(-x)}) \quad (\text{car } -x \geq 0 \text{ puisque } x \leq 0) \\ &= e^{\lambda x} \end{aligned}$$

× Si $x > 0$, alors : $[V \leq x] = \Omega$ donc :

$$F_V(x) = \mathbb{P}([V \leq x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

En conclusion : $F_V : x \mapsto \begin{cases} e^{\lambda x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

• La fonction F_V est continue :

- × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction usuelle,
- × sur $]0, +\infty[$ en tant que fonction constante,
- × en 0. En effet :

- d'une part : $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_V(x) = F_V(0) = e^{\lambda \times 0} = 1$
- d'autre part : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_V(x) = 1$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_V(x) = F_V(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_V(x)$.

La fonction F_V est donc continue sur \mathbb{R} .

- La fonction F_V est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

La fonction F_V est donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0.

La v.a.r. V est donc une v.a.r. à densité.

- Pour déterminer une densité f_V et $V = -X_2$, on dérive sa fonction de répartition F_V sur les intervalles **ouverts** $] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

× si $x \in] - \infty, 0[$, alors :

$$f_V(x) = F_V'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

× si $x \in]0, +\infty[$, alors :

$$f_V(x) = F_V'(x) = 0$$

× On choisit enfin : $f_V(0) = 0$.

Enfin : $f_V : x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

□

- c) Montrer que pour tout réel y , l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt$ est convergente et qu'elle vaut $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ (on distinguera les deux cas : $y \geq 0$ et $y < 0$).

Démonstration.

Soit $y \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord, comme f_{X_1} est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt = \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt$$

- Deux cas se présentent alors :

× si $y \leq 0$, alors pour tout $t \in [0, +\infty[$: $y-t < 0$. Ainsi, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$f_{-X_2}(y-t) = \lambda e^{\lambda(y-t)}$$

Soit $B \in [0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^B f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt &= \int_0^B \lambda e^{-\lambda t} \lambda e^{\lambda(y-t)} dt \\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} \int_0^B e^{-\lambda t} e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} \int_0^B e^{-2\lambda t} dt \\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} \frac{1}{2\lambda} \int_0^B 2\lambda e^{-2\lambda t} dt \end{aligned}$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} 2\lambda e^{-2\lambda t} dt$ est convergente (et vaut 1) car c'est le moment d'ordre 0 de $U \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda)$. On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda y} \times 1 = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} \quad (\text{car } y < 0)$$

$$\boxed{\forall y < 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}}$$

× si $y \geq 0$, alors remarquons que pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) \neq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} f_{X_1}(t) \neq 0 \\ f_{-X_2}(y-t) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in [0, +\infty[\\ y-t \in]-\infty, 0[\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ y-t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t > y \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit : $f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) \neq 0 \Leftrightarrow t > y$. Et ainsi :

$$\int_0^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt = \int_y^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt$$

car $t \mapsto f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t)$ est nulle en dehors de $]y, +\infty[$.

Soit $B \in [y, +\infty[$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_y^B f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt &= \int_y^B \lambda e^{-\lambda t} \lambda e^{\lambda(y-t)} dt \\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} \int_y^B e^{-2\lambda t} dt \\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} \frac{1}{2\lambda} \int_y^B 2\lambda e^{-2\lambda t} dt \end{aligned}$$

Or, comme $\int_0^{+\infty} 2\lambda e^{-2\lambda t} dt$ est convergente (cf point précédent), alors $\int_y^{+\infty} 2\lambda e^{-2\lambda t} dt$ est aussi convergente.

De plus, en conservant la notation $U \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda)$:

$$\begin{aligned} \int_y^{+\infty} 2\lambda e^{-2\lambda t} dt &= \int_y^{+\infty} f_U(t) dt \\ &= \mathbb{P}([U \geq y]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([U \leq y]) \quad (\text{car } U \text{ est une} \\ &\quad \text{v.a.r. à densité}) \\ &= 1 - (1 - e^{-2\lambda y}) \\ &= e^{-2\lambda y} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\int_y^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda y} \times e^{-2\lambda y} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} \quad (\text{car } y \geq 0)$$

$$\boxed{\forall y \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}} \quad \square$$

d) Établir que la fonction $y \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ est une densité de probabilité sur \mathbb{R} ; on admet que c'est une densité de la variable aléatoire Y .

Démonstration.

- La fonction $y \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ est continue sur \mathbb{R} car elle est la composée $h = h_2 \circ h_1$ de :
 - × $h_1 : y \mapsto -\lambda|y|$ qui est :
 - continue sur \mathbb{R} ,
 - telle que : $h_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
 - × $h_2 : y \mapsto \frac{\lambda}{2} e^y$ qui est continue sur \mathbb{R}

La fonction $y \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ est continue sur \mathbb{R} .

- Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors, comme $\lambda > 0$: $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} \geq 0$.

$$\forall y \in \mathbb{R}, \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} \geq 0$$

- Démontrons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy$ est convergente et vaut 1.

× Étudions tout d'abord $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy$.

Pour tout $y \in [0, +\infty[$.

$$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} = \frac{1}{2} \times \lambda e^{-\lambda y}$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy$ est convergente (et vaut 1) car c'est le moment d'ordre 0 de $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

× On sait alors :

- l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy$ est convergente,

- la fonction $y \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ est paire. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|-y|} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$$

On en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy$ est convergente et vaut 1.

On en déduit que la fonction $y \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ est une densité de probabilité. □

e) Déterminer pour tout y réel, $f_{|Y|}(y)$. Reconnaître la loi de $|Y| = T - Z$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après 7.a) : $|Y|(\Omega) = [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
 - × si $x \in]-\infty, 0]$, alors $[|Y| \leq x] = \emptyset$ (car $|Y|(\Omega) = [0, +\infty[$). D'où :

$$F_{|Y|}(x) = \mathbb{P}([|Y| \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

- × si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_{|Y|}(x) &= \mathbb{P}([|Y| \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([-x \leq Y \leq x]) \\ &= \int_{-x}^x f_{|Y|}(t) dt && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= 2 \int_0^x f_{|Y|}(t) dt && \text{(car } f_{|Y|} \text{ est paire (cf question précédente))} \\ &= 2 \int_0^x \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|t|} dt \\ &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= [-e^{-\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Enfinement : $F_{|Y|} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

On en déduit $|Y| \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et donc : $f_{|Y|} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

□

Partie II. Loi géométrique

Soit p un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $\frac{1}{p}$).

On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

8. a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}([X_1 \leq k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

Démonstration.

$$\text{Comme } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p), \text{ alors : } \mathbb{V}(X_1) = \frac{q}{p^2} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X_1 \leq k]) = 1 - q^k.$$

Commentaire

- L'énoncé insiste bien sur la non nécessité d'une démonstration, notamment pour les valeurs, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ de $\mathbb{P}([X_1 \leq k])$. Celles-ci ne sont pas un attendu du programme, mais c'est une propriété très classique de la loi géométrique. Elle doit donc être connue et on se doit de savoir la redémontrer.
- Rappelons maintenant la démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Notons : $[X_1 \leq k] = \bigcup_{i=1}^k [X_1 = i]$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_1 \leq k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k [X_1 = i]\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \mathbb{P}([X_1 = i]) && \text{(les événements } [X_1 = i] \\ &&& \text{étant incompatibles)} \\ &= \sum_{i=1}^k p q^{i-1} && \text{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)) \\ &= p \sum_{i=0}^{k-1} q^i = p \frac{1 - q^k}{1 - q} && \text{(car } q \neq 1) \\ &= 1 - q^k \end{aligned}$$

□

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{E}(X_1 - X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 - X_2)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. $X_1 + X_2$ et $X_1 - X_2$ admettent une variance (et donc une espérance) en tant que combinaisons linéaires de v.a.r. qui en admettent une.
- Par linéarité de l'espérance :

× tout d'abord :

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}$$

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \frac{2}{p}$$

× ensuite :

$$\mathbb{E}(X_1 - X_2) = \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} = 0$$

$$\mathbb{E}(X_1 - X_2) = 0$$

- Comme les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) = \frac{q}{p^2} + \frac{q}{p^2} = 2 \frac{q}{p^2}$$

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) = 2 \frac{q}{p^2}$$

- Comme les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes, par lemme des coalitions, les v.a.r. X_1 et $-X_2$ le sont aussi. Ainsi :

$$\mathbb{V}(X_1 - X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(-X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) = 2 \frac{q}{p^2}$$

$$\mathbb{V}(X_1 - X_2) = 2 \frac{q}{p^2}$$

Commentaire

Attention à l'erreur classique. Même si X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{V}(X_1 - X_2) \neq \mathbb{V}(X_1) - \mathbb{V}(X_2)$$

□

- c) Établir la relation : $\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $[X_1 = X_2] = [X_1 - X_2 = 0]$.
- La famille $([X_2 = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements. Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 - X_2 = 0]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 - k = 0]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k]) \mathbb{P}([X_1 = k]) \quad (\text{car } X_1 \text{ et } X_2 \\ &\quad \text{sont indépendantes}) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{k-1} p q^{k-1} \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} \\ &= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k = p^2 \frac{1}{1 - q^2} \quad (\text{car } q^2 \in] - 1, 1[) \\ &= p^2 \frac{1}{(1 - q)(1 + q)} = \frac{p}{1 + q} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1 + q}$$

□

9. a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.
En déduire $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$ et $\mathbb{E}(T)$.

Démonstration.

- Comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors : $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
× Déterminons d'abord : $\mathbb{P}([Z > k])$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Z > k]) &= \mathbb{P}([X_1 > k] \cap [X_2 > k]) \\
 &= \mathbb{P}([X_1 > k]) \times \mathbb{P}([X_2 > k]) && \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \\
 & && \text{sont indépendantes)} \\
 &= (1 - \mathbb{P}([X_1 \leq k])) (1 - \mathbb{P}([X_2 \leq k])) \\
 &= (1 - (1 - q^k)) (1 - (1 - q^k)) && \text{(d'après la} \\
 & && \text{question 1.)} \\
 &= q^k q^k = (q^2)^k
 \end{aligned}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Z > k]) = (q^2)^k$

× De plus :

$$\begin{aligned}
 [Z > k - 1] &= [Z \geq k] && \text{(car } Z \text{ est à valeurs entières)} \\
 &= [Z = k] \cup [Z > k]
 \end{aligned}$$

Les événements $[Z = k]$ et $[Z > k]$ étant incompatibles :

$$\mathbb{P}([Z > k - 1]) = \mathbb{P}([Z = k]) + \mathbb{P}([Z > k])$$

$\text{Ainsi : } \mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k - 1]) - \mathbb{P}([Z > k]).$

× Deux cas se présentent alors :

- si $k \geq 2$, alors $(k - 1, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. D'où, d'après le 1^{er} point :

$$\mathbb{P}([Z = k]) = (q^2)^{k-1} - (q^2)^k = (q^2)^{k-1} (1 - q^2)$$

- si $k = 1$, alors :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Z = 1]) &= \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}([Z > 1]) && \text{(car } Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*) \\
 &= 1 - (q^2)^1 = 1 - q^2
 \end{aligned}$$

Or, on remarque :

$$(q^2)^{1-1} (1 - q^2) = 1 - q^2$$

La formule précédente reste donc valide pour $k = 1$.

Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([Z = k]) = (q^2)^{k-1} (1 - q^2) = \left(1 - (1 - q^2)\right)^{k-1} (1 - q^2)$$

$\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q^2).$

$\text{De plus : } \mathbb{E}(Z) = \frac{1}{1 - q^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z) = \frac{1 - (1 - q^2)}{(1 - q^2)^2} = \frac{q^2}{(1 - q^2)^2}.$

- Enfin, comme $T + Z = X_1 + X_2$, alors :

$$T = X_1 + X_2 - Z$$

La v.a.r. T admet donc une espérance comme combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une. De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(X_1 + X_2 - Z) \\ &= \mathbb{E}(X_1 + X_2) - \mathbb{E}(Z) && \text{(par linéarité de} \\ &&& \text{l'espérance)} \\ &= \frac{2}{p} - \frac{1}{1 - q^2} \\ &= \frac{2}{1 - q} - \frac{1}{(1 - q)(1 + q)} \\ &= \frac{2(1 + q) - 1}{1 - q^2} = \frac{1 + 2q}{1 - q^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \frac{1 + 2q}{1 - q^2}}$$

□

- b) Soit k un entier de \mathbb{N}^* . Justifier l'égalité : $[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$.

En déduire la relation suivante : $\mathbb{P}([T = k]) = 2 \mathbb{P}([X_1 = k]) - \mathbb{P}([Z = k])$.

Démonstration.

Soit $\omega \in \Omega$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \omega &\in [Z = k] \cup [T = k] \\ \Leftrightarrow Z(\omega) = k \text{ OU } T(\omega) = k \\ \Leftrightarrow \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \text{ OU } \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \end{aligned}$$

Deux cas se présentent :

× si $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_1(\omega)$ alors, $\min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_2(\omega)$ et :

$$\begin{aligned} \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \text{ OU } \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \\ \Leftrightarrow X_2(\omega) = k \text{ OU } X_1(\omega) = k \end{aligned}$$

× si $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_2(\omega)$, alors :

$$\begin{aligned} \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \text{ OU } \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \\ \Leftrightarrow X_1(\omega) = k \text{ OU } X_2(\omega) = k \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \omega &\in [Z = k] \cup [T = k] \\ \Leftrightarrow X_1(\omega) = k \text{ OU } X_2(\omega) = k \\ \Leftrightarrow \omega &\in [X_1 = k] \cup [X_2 = k] \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } [Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]}$$

- De plus :

× D'une part :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z = k] \cup [T = k]) &= \mathbb{P}([Z = k]) + \mathbb{P}([T = k]) - \mathbb{P}([Z = k] \cap [T = k]) \\ &= \mathbb{P}([Z = k]) + \mathbb{P}([T = k]) - \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = k])\end{aligned}$$

En effet, on peut démontrer en procédant comme en début de question que :

$$[Z = k] \cap [T = k] = [X_1 = k] \cap [X_2 = k]$$

× D'autre part :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_1 = k] \cup [X_2 = k]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 = k]) + \mathbb{P}([X_2 = k]) - \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = k]) \\ &= 2 \mathbb{P}([X_1 = k]) - \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = k])\end{aligned}$$

(car X_1 et X_2 ont même loi)

- D'après ce qui précède :

$$\mathbb{P}([Z = k] \cup [T = k]) = \mathbb{P}([X_1 = k] \cup [X_2 = k])$$

d'où $\mathbb{P}([Z = k]) + \mathbb{P}([T = k]) - \cancel{\mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = k])} = 2 \mathbb{P}([X_1 = k]) - \cancel{\mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = k])}$

et $\mathbb{P}([T = k]) = 2 \mathbb{P}([X_1 = k]) - \mathbb{P}([Z = k])$

$$\mathbb{P}([T = k]) = 2 \mathbb{P}([X_1 = k]) - \mathbb{P}([Z = k])$$

Commentaire

- Dans l'énoncé, il est demandé de « justifier l'égalité » et non de la démontrer. Cette nuance signifie généralement que des points seront attribués même pour une explication avec les mains.
- Il est pratique pour conclure que de dire que les événements $[T = k]$ et $[Z = k]$ (resp. $[X_1 = k]$ et $[X_2 = k]$) sont incompatibles. Mais on ne peut en aucun cas affirmer une telle chose !
Il peut exister $\omega \in \Omega$ tel que $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k$ et $\min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k$. Cela se produit pour tout $\omega \in \Omega$ tel que : $X_1(\omega) = X_2(\omega) = k$.

□

c) Établir la formule : $\mathbb{V}(T) = \frac{q(2q^2 + q + 2)}{(1 - q^2)^2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors : $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- La v.a.r. $T = X_1 + X_2 - Z$ admet une variance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.

- Par définition du moment d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(T^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \mathbb{P}([T = k]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (2\mathbb{P}([X_1 = k]) - \mathbb{P}([Z = k])) && \text{(d'après la question précédente)} \\
 &= 2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \mathbb{P}([X_1 = k]) - \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \mathbb{P}([Z = k]) \\
 &= 2 \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(Z^2) \\
 &= 2 (\mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2) - (\mathbb{V}(Z) + (\mathbb{E}(Z))^2) && \text{(par la formule de Kœnig-Huygens)} \\
 &= 2 \left(\frac{q}{p^2} + \left(\frac{1}{p}\right)^2 \right) - \left(\frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \left(\frac{1}{1-q^2}\right)^2 \right) && \text{(d'après les questions précédentes)} \\
 &= 2 \frac{q+1}{p^2} - \frac{q^2+1}{(1-q^2)^2}
 \end{aligned}$$

$$T \text{ admet un moment d'ordre 2 et } \mathbb{E}(T^2) = 2 \frac{q+1}{p^2} - \frac{q^2+1}{(1-q^2)^2}.$$

- Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}(T) &= \mathbb{E}(T^2) - (\mathbb{E}(T))^2 \\
 &= \left(2 \frac{q+1}{p^2} - \frac{q^2+1}{(1-q^2)^2} \right) - \left(\frac{1+2q}{1-q^2} \right)^2 \\
 &= 2 \frac{q+1}{p^2} - \frac{q^2+1}{(1-q^2)^2} - \frac{1+4q+4q^2}{(1-q^2)^2} \\
 &= 2 \frac{q+1}{p^2} - \frac{2+4q+5q^2}{(1-q^2)^2} \\
 &= 2 \frac{q+1}{(1-q)^2} - \frac{2+4q+5q^2}{((1-q)(1+q))^2} \\
 &= 2 \frac{(q+1)(1+q)^2}{(1-q)^2(1+q)^2} - \frac{2+4q+5q^2}{((1-q)(1+q))^2} \\
 &= \frac{1}{(1-q)^2(1+q)^2} (2(1+q)^3 - (2+4q+5q^2)) \\
 &= \frac{1}{(1-q)^2(1+q)^2} (2(1+3q+3q^2+q^3) - (2+4q+5q^2)) \\
 &= \frac{1}{(1-q)^2(1+q)^2} (2q+q^2+2q^3) = \frac{q(2+q+2q^2)}{(1-q)^2(1+q)^2}
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{V}(T) = \frac{q(2+q+2q^2)}{(1-q)^2(1+q)^2}$$

Commentaire

- Il faut prendre le réflexe de connaître la formule de Kœnig-Huygens dans les deux sens.

$$\begin{aligned} \text{L'écriture} \quad \mathbb{V}(X_1) &= \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2 \\ \text{fournit l'égalité} \quad \mathbb{E}(X_1^2) &= \mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2 \end{aligned}$$

C'est cette dernière égalité qui est utilisée dans la démonstration.

- On pouvait aussi calculer $\mathbb{V}(T)$ en s'aidant de l'égalité :

$$T + Z = X_1 + X_2$$

En effet :

$$\mathbb{V}(T + Z) = \mathbb{V}(X_1 + X_2) = \frac{2q}{p^2}$$

Par ailleurs :

$$\mathbb{V}(T + Z) = \mathbb{V}(T) + \mathbb{V}(Z) + 2 \text{Cov}(T, Z)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(T) &= \frac{2q}{p^2} - \mathbb{V}(Z) - 2 \text{Cov}(T, Z) \\ &= \frac{2q}{p^2} - \frac{q^2}{(1-q^2)^2} - 2 \text{Cov}(T, Z) \end{aligned}$$

Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(T, Z) &= \mathbb{E}(TZ) - \mathbb{E}(T) \mathbb{E}(Z) \\ &= \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(T) \mathbb{E}(Z) \quad (\text{car } TZ = X_1 X_2 \text{ (*)}) \\ &= \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(T) \mathbb{E}(Z) \quad (\text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont} \\ &\quad \text{indépendantes}) \\ &= \frac{1}{p} \frac{1}{p} - \frac{1+2q}{1-q^2} \frac{1}{1-q^2} \\ &= \frac{1}{p^2} - \frac{1+2q}{(1-q^2)^2} \end{aligned}$$

((*) $TZ = \max(X_1, X_2) \min(X_1, X_2) = X_1 X_2$)

En combinant tous ces résultats, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(T) &= \frac{2q}{p^2} - \frac{q^2}{(1-q^2)^2} - 2 \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1+2q}{(1-q^2)^2} \right) \\ &= \frac{2(q-1)}{p^2} + \frac{-q^2+4q+2}{(1-q^2)^2} \\ &= \frac{2(q-1)}{(1-q)^2} + \frac{-q^2+4q+2}{(1-q^2)^2} \\ &= \frac{1}{(1-q^2)^2} (2(q-1)(1+q)^2 - q^2 + 4q + 2) \\ &= \frac{1}{(1-q^2)^2} (2q + q^2 + 2q^3) = \frac{q(2+q+2q^2)}{(1-q^2)^2} \end{aligned}$$

□

10. a) Préciser $(T - Z)(\Omega)$. Exprimer pour tout j de \mathbb{N}^* , l'évènement $[Z = j] \cap [Z = T]$ en fonction des évènements $[X_1 = j]$ et $[X_2 = j]$.

En déduire pour tout j de \mathbb{N}^* , l'expression de $\mathbb{P}([Z = j] \cap [Z = T])$.

Démonstration.

- Rappelons que : $T - Z = |X_1 - X_2|$.
Tout d'abord, comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors :

$$\begin{aligned} (X_1 - X_2)(\Omega) &= \{X_1(\omega) - X_2(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ &\subset \{i - j \mid (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2\} = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ainsi, $(|X_1 - X_2|)(\Omega) \subset \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{N}$.

$$(T - Z)(\Omega) \subset \mathbb{N}$$

- Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} [Z = j] \cap [Z = T] &= [\min(X_1, X_2) = j] \cap [\min(X_1, X_2) = \max(X_1, X_2)] \\ &= [\min(X_1, X_2) = j] \cap [\max(X_1, X_2) = j] \\ &= [X_1 = j] \cap [X_2 = j] \end{aligned}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, [Z = j] \cap [Z = T] = [X_1 = j] \cap [X_2 = j]$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = j] \cap [Z = T]) &= \mathbb{P}([X_1 = j] \cap [X_2 = j]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 = j]) \times \mathbb{P}([X_2 = j]) \quad (\text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont} \\ &\quad \text{indépendantes}) \\ &= p q^{j-1} \times p q^{j-1} = p^2 q^{2j-2} \end{aligned}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Z = j] \cap [Z = T]) = p^2 q^{2j-2}$$

□

b) Montrer que pour tout couple (j, l) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T - Z = l]) = 2p^2 q^{2j+l-2}$.

Démonstration.

- Soit $(j, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{aligned} [Z = j] \cap [T - Z = l] &= [Z = j] \cap [T - j = l] \\ &= [Z = j] \cap [T = j + l] \\ &= [\min(X_1, X_2) = j] \cap [\max(X_1, X_2) = j + l] \\ &= ([X_1 = j] \cap [X_2 = j + l]) \cup ([X_1 = j + l] \cap [X_2 = j]) \end{aligned}$$

Il s'agit d'une réunion de deux évènements incompatibles. En effet :

$$\begin{aligned} &([X_1 = j] \cap [X_2 = j + l]) \cap ([X_1 = j + l] \cap [X_2 = j]) \\ &= ([X_1 = j] \cap [X_1 = j + l]) \cap ([X_2 = j] \cap [X_2 = j + l]) \\ &= \emptyset \cap \emptyset = \emptyset \quad (\text{car } l \neq 0) \end{aligned}$$

• Ainsi :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}([Z = j] \cap [T - Z = l]) \\
 &= \mathbb{P}([X_1 = j] \cap [X_2 = j + l]) + \mathbb{P}([X_1 = j + l] \cap [X_2 = j]) \\
 &= \mathbb{P}([X_1 = j]) \times \mathbb{P}([X_2 = j + l]) + \mathbb{P}([X_1 = j + l]) \times \mathbb{P}([X_2 = j]) \quad (\text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont} \\
 & \quad \text{indépendantes}) \\
 &= p q^{j-1} \times p q^{j+l-1} + p q^{j+l-1} \times p q^{j-1} \\
 &= p^2 q^{2j+l-2} + p^2 q^{2j+l-2} = 2 p^2 q^{2j+l-2}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (j, l) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathbb{P}([Z = j] \cap [T - Z = l]) = 2 p^2 q^{2j+l-2}}$$

□

c) Montrer que pour tout k de \mathbb{Z} , $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) = \frac{pq^{|k|}}{1+q}$.
 (on distinguera trois cas : $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$)

Démonstration.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Trois cas se présentent.

• Si $k = 0$:

$$\mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) = \mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) = \mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q} = \frac{pq^0}{1+q}$$

• Si $k \geq 0$:

La famille $([X_2 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.

Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i] \cap [X_1 - X_2 = k]) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i] \cap [X_1 - i = k]) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i] \cap [X_1 = i + k]) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i + k]) \quad (\text{car } X_1 \text{ et } X_2 \\
 & \quad \text{sont indépendantes}) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} p q^{i-1} \times p q^{i+k-1} \\
 &= p^2 q^k \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} = p^2 q^k \sum_{i=1}^{+\infty} (q^2)^{i-1} \\
 &= p^2 q^k \sum_{i=0}^{+\infty} (q^2)^i \quad (\text{par décalage d'indice}) \\
 &= p^2 q^k \frac{1}{1-q^2} = p^2 q^k \frac{1}{\cancel{(1-q)} (1+q)} \quad (\text{car } q^2 \in]-1, 1[) \\
 &= \frac{p q^k}{1+q} = \frac{p q^{|k|}}{1+q}
 \end{aligned}$$

- Si $k \leq 0$:

On procède de la même manière que dans le point précédent. On obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i + k]) \\
 &= \sum_{\substack{i=1 \\ \text{tel que } i+k \in \mathbb{N}^*}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i + k]) \\
 &\quad + \sum_{\substack{i=1 \\ \text{tel que } i+k \notin \mathbb{N}^*}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \cancel{\mathbb{P}([X_1 = i + k])} \quad ([X_1 = i + k] = \emptyset \\
 &\quad \text{car } i + k \notin \mathbb{N}^*) \\
 &= \sum_{i=-k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i + k]) \quad \left(\text{car } \begin{array}{l} i+k \geq 1 \\ i \geq -k+1 \end{array} \right) \\
 &= \sum_{i=-k+1}^{+\infty} p q^{i-1} \times p q^{i+k-1} \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} p q^{i-k-1} \times p q^{i-1} \quad (\text{par décalage d'indice}) \\
 &= p^2 q^{-k} \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} \\
 &= \frac{p^2 q^{-k}}{(1-q)(1+q)} = \frac{p q^{|k|}}{1+q} \quad (\text{en procédant comme au point précédent})
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) = \frac{p q^{|k|}}{1+q}}$$

□

- d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

Démonstration.

- Rappelons que : $T - Z = |X_1 - X_2|$.

$$\boxed{(|X_1 - X_2|)(\Omega) \subset \mathbb{N}}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Remarquons tout d'abord :

$$[|X_1 - X_2| = k] = [X_1 - X_2 = k] \cup [X_1 - X_2 = -k]$$

Deux cas se présentent :

- × si $k \neq 0$, alors les événements $[X_1 - X_2 = k]$ et $[X_1 - X_2 = -k]$ sont incompatibles. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([|X_1 - X_2| = k]) &= \mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) + \mathbb{P}([X_1 - X_2 = -k]) \\
 &= \frac{p q^k}{1+q} + \frac{p q^k}{1+q} = 2 \frac{p q^k}{1+q} \quad (\text{car } |k| = k)
 \end{aligned}$$

- × si $k = 0$:

$$\mathbb{P}([|X_1 - X_2| = 0]) = \mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) = \frac{p}{1+q}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([|X_1 - X_2| = k]) = 2 \frac{p q^k}{1+q} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([|X_1 - X_2| = 0]) = \frac{p}{1+q}}$$

□

e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T - Z$ sont indépendantes.

Démonstration.

Il s'agit de démontrer :

$$\forall j \in Z(\Omega), \forall l \in (T - Z)(\Omega), \mathbb{P}([Z = j] \cap [T - Z = l]) = \mathbb{P}([Z = j]) \times \mathbb{P}([T - Z = l])$$

avec $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $(T - Z)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

• Soit $(j, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Comme $T - Z = |X_1 - X_2|$, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = j]) \times \mathbb{P}([T - Z = l]) &= \mathbb{P}([Z = j]) \times \mathbb{P}(|X_1 - X_2| = l) \\ &= (q^2)^{j-1} (1 - q^2) \times 2 \frac{p q^l}{1 + q} && \text{(d'après les questions précédentes)} \\ &= q^{2j-2} (1 - q) \cancel{(1 + q)} \times 2 \frac{p q^l}{\cancel{1 + q}} \\ &= q^{2j-2} p \times 2p q^l = 2 p^2 q^{2j+l-2} \\ &= \mathbb{P}([Z = j] \cap [T - Z = l]) && \text{(d'après 3.c)} \end{aligned}$$

• Il reste à étudier le cas où $j \in \mathbb{N}^*$ et $l = 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = j]) \times \mathbb{P}([T - Z = 0]) &= \mathbb{P}([Z = j]) \times \mathbb{P}(|X_1 - X_2| = 0) \\ &= (q^2)^{j-1} (1 - q^2) \times \frac{p}{1 + q} && \text{(d'après les questions précédentes)} \\ &= q^{2j-2} (1 - q) \cancel{(1 + q)} \times \frac{p}{\cancel{1 + q}} \\ &= q^{2j-2} p \times p = p^2 q^{2j-2} \\ &= \mathbb{P}([Z = j] \cap [T - Z = 0]) && \text{(d'après 3.a)} \end{aligned}$$

Les variables Z et $T - Z$ sont donc indépendantes.

□

11. a) À l'aide du résultat de la question 10.e), calculer $\text{Cov}(Z, T)$.

Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

• D'après la question 10.e), les variables Z et $T - Z$ sont indépendantes. On en déduit :

$$\text{Cov}(Z, T - Z) = 0$$

Or, par linéarité gauche de l'opérateur Cov :

$$\underbrace{\text{Cov}(Z, T - Z)}_0 = \text{Cov}(Z, T) - \underbrace{\text{Cov}(Z, Z)}_{\mathbb{V}(Z)}$$

$$\text{Ainsi : Cov}(Z, T) = \mathbb{V}(Z) = \frac{q^2}{(1 - q^2)^2}$$

• Comme $q \neq 0$, $\text{Cov}(Z, T) \neq 0$.

Ainsi, les v.a.r. Z et T ne sont pas indépendantes.

□

b) Calculer en fonction de q , le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T .

Démonstration.

Par définition :

$$\begin{aligned} \rho(Z, T) &= \frac{\text{Cov}(Z, T)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)} \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \\ &= \frac{\mathbb{V}(Z)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)} \sqrt{\mathbb{V}(T)}} = \frac{\cancel{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}} \sqrt{\mathbb{V}(Z)}}{\cancel{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}} \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{q^2}{(1-q^2)^2}}{\frac{q(2+q+2q^2)}{(1-q^2)^2}}} = \sqrt{\frac{q^2}{(1-q^2)^2} \frac{(1-q^2)^2}{q(2+q+2q^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{q}{2+q+2q^2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\rho(Z, T) = \sqrt{\frac{q}{2+q+2q^2}}}$$

□

c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z, T) .

Démonstration.

• On rappelle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

• Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Trois cas se présentent :

× si $i < j$: alors $[Z = j] \cap [T = i] = \emptyset$.

En effet, $Z = \min(X_1, X_2) \leq \max(X_1, X_2) = T$.

$$\boxed{\text{Si } i < j, \mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0}$$

× si $i = j$: alors $[Z = j] \cap [T = j] = [X_1 = j] \cap [X_2 = j]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j]) &= \mathbb{P}([X_1 = j] \cap [X_2 = j]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 = j]) \times \mathbb{P}([X_2 = j]) \quad (\text{car } X_1 \text{ et } X_2 \\ &\quad \text{sont indépendantes}) \\ &= p q^{j-1} \times p q^{j-1} = p^2 q^{2j-2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j]) = p^2 q^{2j-2}}$$

× si $i > j$: alors $[Z = j] \cap [T = i] = ([X_1 = j] \cap [X_2 = i]) \cup ([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$.

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i]) \\ &= \mathbb{P}(([X_1 = j] \cap [X_2 = i]) \cup ([X_1 = i] \cap [X_2 = j])) \\ &= \mathbb{P}([X_1 = j] \cap [X_2 = i]) + \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \quad (\text{car } [X_1 = j] \cap [X_2 = i] \\ &\quad \text{et } [X_1 = i] \cap [X_2 = j] \\ &\quad \text{sont incompatibles}) \\ &= \mathbb{P}([X_1 = j]) \times \mathbb{P}([X_2 = i]) + \mathbb{P}([X_1 = i]) \times \mathbb{P}([X_2 = j]) \quad (\text{car } X_1 \text{ et } X_2 \\ &\quad \text{sont indépendantes}) \\ &= p q^{j-1} \times p q^{i-1} + p q^{i-1} \times p q^{j-1} = 2 p^2 q^{i+j-2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } i > j, \mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i]) = 2 p^2 q^{i+j-2}}$$

□

d) Déterminer pour tout j de \mathbb{N}^* , la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.

Démonstration.

Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- Rappelons que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) = \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i])}{\mathbb{P}([Z = j])} = \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i])}{(q^2)^{j-1} (1 - q^2)}$$

La loi du couple (Z, T) étant donnée par cas, trois cas se présentent encore ici :

× si $i < j$: alors $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

$$\boxed{\text{Si } i < j, \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) = 0.}$$

× si $i = j$: alors $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j]) = p^2 q^{2j-2}$.

$$\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = j]) = \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j])}{(q^2)^{j-1} (1 - q^2)} = \frac{p^2 q^{2j-2}}{(q^2)^{j-1} (1 - q^2)} = \frac{p^2}{(1 - q) (1 + q)} = \frac{p}{1 + q}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = j]) = \frac{p}{1 + q}}$$

× si $i > j$: alors $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i]) = 2 p^2 q^{i+j-2}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) &= \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i])}{(q^2)^{j-1} (1 - q^2)} \\ &= \frac{2 p^2 q^{i+j-2}}{(q^2)^{j-1} (1 - q^2)} \\ &= \frac{2 p^2 q^{i-j} q^i}{q^j (1 - q^2)} \\ &= \frac{2 p^2 q^i}{q^j (1 - q) (1 + q)} \\ &= \frac{2 p q^i}{q^j (1 + q)} = \frac{2 p q^{i-j}}{1 + q} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } i > j, \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) = \frac{2 p q^{i-j}}{1 + q}.}$$

□

e) Soit j un élément de \mathbb{N}^* . On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans \mathbb{N}^* , dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.

Calculer $\mathbb{E}(D_j)$.

Démonstration.

- La v.a.r. D_j admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{i \geq 1} i \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N i \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) \\ = & \sum_{i=1}^{j-1} i \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) + \sum_{i=j}^j i \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) + \sum_{i=j+1}^N i \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) \quad (\text{par relation de Chasles en supposant } N > j) \\ = & 0 + \frac{p}{1+q} + \sum_{i=j+1}^N i \frac{2 p q^{i-j}}{1+q} \quad (\text{d'après la question précédente}) \end{aligned}$$

- Étudions en particulier la somme de droite :

$$\begin{aligned} \sum_{i=j+1}^N i \frac{2 p q^{i-j}}{1+q} &= \frac{2 p}{1+q} \sum_{i=j+1}^N i q^{i-j} \\ &= \frac{2 p}{1+q} \sum_{i=1}^{N-j} i q^{(i+j)-j} \quad (\text{par décalage d'indice}) \\ &= \frac{2 p}{1+q} \sum_{i=1}^{N-j} i q^i = \frac{2 p q}{1+q} \sum_{i=1}^{N-j} i q^{i-1} \end{aligned}$$

On reconnaît la somme partielle (d'ordre $N - j$) d'une série géométrique dérivée première de raison $q \in] - 1, 1[$. Elle est donc convergente.

- Ainsi, la série $\sum_{i \geq 1} i \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i])$ est convergente et par passage à la limite :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} i \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) &= \frac{p}{1+q} + \frac{2 p q}{1+q} \sum_{i=1}^{+\infty} i q^{i-1} \\ &= \frac{p}{1+q} + \frac{2 p q}{1+q} \frac{1}{(1-q)^2} \\ &= \frac{1}{(1+q)(1-q)} (p(1-q) + 2q) \\ &= \frac{1}{1-q^2} ((1-q)^2 + 2q) = \frac{1+q^2}{1-q^2} \end{aligned}$$

La variable D_j admet une espérance et $\mathbb{E}(D_j) = \frac{1+q^2}{1-q^2}$

□

Commentaire

- Dans cette question, on détermine $\sum_{i=1}^{+\infty} i \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i])$. Cette écriture est très proche de l'écriture de $\mathbb{E}(T)$: on a simplement remplacé ici l'application probabilité \mathbb{P} par l'application probabilité $\mathbb{P}_{[Z=j]}$. Autrement dit, on détermine l'espérance de T sachant que l'événement $[Z = j]$ est réalisé.
- Cet objet est relativement classique en mathématiques. Il s'agit de l'espérance conditionnelle de la variable T relativement à l'événement $[Z = j]$. Elle se note : $\mathbb{E}(T \mid [Z = j])$.
(cette notation n'est pas très heureuse au vu de celle des probabilités conditionnelles)
- On peut noter que ces calculs d'espérances conditionnelles permettent de déterminer l'espérance. Sous réserve d'existence des objets considérés :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = j]) \mathbb{E}(T \mid [Z = j])$$

Il faut considérer cette égalité comme une formule des probabilités totales (qui est à la base de ce résultat) adaptée à la notion d'espérance.

Partie III. Convergences

Dans les questions 12 à 15, λ désigne un paramètre réel strictement positif, inconnu.

Pour n élément de \mathbb{N}^* , on considère un n -échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ .

On pose pour tout n de \mathbb{N}^* : $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $J_n = \lambda S_n$.

12. Calculer pour tout n de \mathbb{N}^* , $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{V}(S_n)$, $\mathbb{E}(J_n)$ et $\mathbb{V}(J_n)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. S_n et J_n admettent une variance (et donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.

- Pour la v.a.r. S_n :
 × tout d'abord :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) && \text{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda} && \text{(car : } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)) \\ &= \frac{n}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{\lambda}}$$

× ensuite :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) && \text{(car } X_1, \dots, X_n \text{ indépendantes)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda^2} && \text{(car : } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)) \\ &= \frac{n}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}}$$

- Pour la v.a.r. J_n :
 × par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(J_n) = \mathbb{E}(\lambda S_n) = \lambda \mathbb{E}(S_n) = \cancel{\lambda} \times \frac{n}{\cancel{\lambda}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(J_n) = n.}$$

× de plus :

$$\mathbb{V}(J_n) = \mathbb{V}(\lambda S_n) = \lambda^2 \mathbb{V}(S_n) = \cancel{\lambda^2} \times \frac{n}{\cancel{\lambda^2}}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{V}(J_n) = n.}$$

□

13. On admet qu'une densité f_{J_n} de J_n est donnée par $f_{J_n}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

a) À l'aide du théorème de transfert, établir pour tout n supérieur ou égal à 3, l'existence de $\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n}\right)$ et de $\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n^2}\right)$, et donner leur valeurs respectives.

Démonstration.

Soit $n \in \llbracket 3, +\infty \llbracket$.

• Par théorème de transfert, la v.a.r. $\frac{1}{J_n}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} f_{J_n}(x) dx$ est absolument convergente.

• Or, pour tout $x \in]0, +\infty[: \frac{1}{x} f_{J_n}(x) \geq 0$.

Il suffit donc de démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} f_{J_n}(x) dx$ est convergente.

• Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\frac{1}{x} f_{J_n}(x) = \frac{1}{x} \times \frac{e^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-2} e^{-x}$$

Or, comme $n-2 \in \mathbb{N}$, d'après **1.a**), l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x} dx$ est convergente.

Ainsi, la v.a.r. $\frac{1}{J_n}$ admet une espérance.

• De plus :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} f_{J_n}(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x} dx = \frac{1}{(n-1)!} I_{n-2}$$

Comme $n-2 \in \mathbb{N}$, d'après **1.b**) : $\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n}\right) = \frac{1}{(n-1)!} \times (n-2)! = \frac{1}{n-1}$.

• Par théorème de transfert, la v.a.r. $\frac{1}{J_n^2}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} f_{J_n}(x) dx$ est absolument convergente.

• Or, pour tout $x \in]0, +\infty[: \frac{1}{x^2} f_{J_n}(x) \geq 0$.

Il suffit donc de démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} f_{J_n}(x) dx$ est convergente.

• Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\frac{1}{x^2} f_{J_n}(x) = \frac{1}{x^2} \times \frac{e^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-3} e^{-x}$$

Or, comme $n-3 \in \mathbb{N}$, d'après **1.a**), l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{n-3} e^{-x} dx$ est convergente.

Ainsi, la v.a.r. $\frac{1}{J_n^2}$ admet une espérance.

- De plus :

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{J_n^2} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} f_{J_n}(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^{n-3} e^{-x} dx = \frac{1}{(n-1)!} I_{n-3}$$

Comme $n - 3 \in \mathbb{N}$, d'après **1.b**) : $\mathbb{E} \left(\frac{1}{J_n^2} \right) = \frac{1}{(n-1)!} \times (n-3)! = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$.

□

- b) On pose pour tout n supérieur ou égal à 3 : $\widehat{\lambda}_n = \frac{n}{S_n}$. Justifier que $\widehat{\lambda}_n$ est un estimateur de λ . Est-il sans biais? Calculer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, du risque quadratique associé à $\widehat{\lambda}_n$ en λ .

Démonstration.

Soit $n \in \llbracket 3, +\infty \llbracket$.

- La v.a.r. $\widehat{\lambda}_n = \frac{n}{S_n} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n X_k}$ s'exprime :
 - × à l'aide du n -échantillon (X_1, \dots, X_n) ,
 - × sans mention du paramètre λ .

La v.a.r. $\widehat{\lambda}_n$ est donc un estimateur de λ .

- On remarque :

$$\widehat{\lambda}_n = n \times \frac{1}{S_n} = n \times \frac{1}{\frac{J_n}{\lambda}} = n \lambda \times \frac{1}{J_n}$$

Or, d'après la question précédente, la v.a.r. $\frac{1}{J_n}$ admet un moment d'ordre 2 et donc une variance. On en déduit que la v.a.r. $\widehat{\lambda}_n$ admet une variance (et donc une espérance) en tant que transformée linéaire de $\frac{1}{J_n}$ qui en admet une.

- De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\lambda \left(\widehat{\lambda}_n \right) &= \mathbb{E}_\lambda \left(n \lambda \times \frac{1}{J_n} \right) \\ &= n \lambda \mathbb{E}_\lambda \left(\frac{1}{J_n} \right) \quad (\text{par linéarité de l'espérance}) \\ &= n \lambda \frac{1}{n-1} \quad (\text{d'après 13.a}) \end{aligned}$$

Comme $n \geq 3$, alors : $\mathbb{E}_\lambda \left(\widehat{\lambda}_n \right) = \frac{n}{n-1} \lambda \neq \lambda$.

La v.a.r. $\widehat{\lambda}_n$ n'est donc pas un estimateur sans biais de λ .

- Par décomposition biais-variance :

$$\begin{aligned} r_\lambda \left(\widehat{\lambda}_n \right) &= \mathbb{V}_\lambda \left(\widehat{\lambda}_n \right) + \left(b_\lambda \left(\widehat{\lambda}_n \right) \right)^2 \\ &= \mathbb{V}_\lambda \left(n \lambda \times \frac{1}{J_n} \right) + \left(\mathbb{E}_\lambda \left(\widehat{\lambda}_n \right) - \lambda \right)^2 \\ &= n^2 \lambda^2 \mathbb{V}_\lambda \left(\frac{1}{J_n} \right) + \left(\frac{n}{n-1} \lambda - \lambda \right)^2 \\ &= n^2 \lambda^2 \mathbb{V}_\lambda \left(\frac{1}{J_n} \right) + \left(\frac{1}{n-1} \lambda \right)^2 \end{aligned}$$

Or, par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_\lambda \left(\frac{1}{J_n} \right) &= \mathbb{E}_\lambda \left(\frac{1}{J_n^2} \right) - \left(\mathbb{E}_\lambda \left(\frac{1}{J_n} \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} \quad (\text{d'après 13.a}) \\ &= \frac{n-1-(n-2)}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{1}{(n-1)^2(n-2)} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} r_\lambda \left(\widehat{\lambda}_n \right) &= \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \lambda^2 + \frac{1}{(n-1)^2} \lambda^2 \\ &= \frac{n^2 + (n-2)}{(n-1)^2(n-2)} \lambda^2 \\ &= \frac{\cancel{(n-1)}(n+2)}{(n-1)^2(n-2)} \lambda^2 \\ &= \frac{n+2}{(n-1)(n-2)} \lambda^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

On obtient alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_\lambda \left(\widehat{\lambda}_n \right) = 0.$

Commentaire

Rappelons que l'on a le résultat suivant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_\lambda \left(\widehat{\lambda}_n \right) = 0 \Rightarrow \widehat{\lambda}_n \text{ est un estimateur convergent de } \lambda$$

Ainsi, la v.a.r. $\widehat{\lambda}_n$ est un estimateur convergent de λ . □

14. Dans cette question, on veut déterminer un intervalle de confiance du paramètre λ au risque α . On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

a) Énoncer le théorème de la limite centrée. En déduire que la variable aléatoire N_n définie par $N_n = \lambda \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

Démonstration.

• Énonçons le théorème central limite.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. :

- × indépendantes,
- × de même loi,
- × de même espérance m ,
- × et de même variance σ^2 **non nulle**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{et} \quad S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}}$$

Alors : $S_n^* \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

- Démontrons : $S_n^* = N_n$.

$$\begin{aligned}
 S_n^* &= \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} \\
 &= \frac{S_n - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} && \text{(d'après 12.)} \\
 &= \cancel{\lambda} \frac{\lambda S_n - n}{\cancel{\lambda} \sqrt{n}} \\
 &= \lambda \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} = N_n
 \end{aligned}$$

$$S_n^* = N_n$$

- La suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. :
 - × indépendantes,
 - × de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$,
 - × de même variance $\frac{1}{\lambda^2}$ **non nulle**.

Par théorème central limite : $N_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. □

- b) En déduire que pour n assez grand, on a approximativement : $\mathbb{P}([-u_\alpha] \leq N_n \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Démonstration.

Comme $N_n \hookrightarrow Z$, alors :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([-u_\alpha] \leq N_n \leq u_\alpha) &= \mathbb{P}([-u_\alpha] \leq Z \leq u_\alpha) \\
 &= \Phi(u_\alpha) - \Phi(-u_\alpha) \\
 &= \Phi(u_\alpha) - (1 - \Phi(u_\alpha)) \\
 &= 2\Phi(u_\alpha) - 1 \\
 &= 2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - \alpha
 \end{aligned}$$

On en déduit, pour n assez grand : $\mathbb{P}([-u_\alpha] \leq N_n \leq u_\alpha) \approx 1 - \alpha$. □

- c) Montrer que pour n assez grand, l'intervalle $\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda}_n, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda}_n\right]$ est un intervalle de confiance de λ au risque α . On note λ_0 la réalisation de $\widehat{\lambda}_n$ sur le n -échantillon.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{P}([-u_\alpha] \leq N_n \leq u_\alpha) \\
 &= \mathbb{P}\left(\left[-u_\alpha \leq \lambda \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \leq u_\alpha\right]\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{n} - u_\alpha \leq \lambda \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} + u_\alpha\right]\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{\sqrt{n}}{S_n}(\sqrt{n} - u_\alpha) \leq \lambda \leq \frac{\sqrt{n}}{S_n}(\sqrt{n} + u_\alpha)\right]\right) \quad \text{(car } \left(\frac{\sqrt{n}}{S_n}\right)(\Omega) \subset]0, +\infty[)
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}([-u_\alpha \leq N_n \leq u_\alpha]) \\
 = & \mathbb{P}\left(\left[\frac{\sqrt{n}}{S_n} \sqrt{n} \left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leq \lambda \leq \frac{\sqrt{n}}{S_n} \sqrt{n} \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right]\right) \\
 = & \mathbb{P}\left(\left[\frac{n}{S_n} \left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leq \lambda \leq \frac{n}{S_n} \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right]\right) \\
 = & \mathbb{P}\left(\left[\widehat{\lambda}_n \left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leq \lambda \leq \widehat{\lambda}_n \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right]\right)
 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\widehat{\lambda}_n \left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leq \lambda \leq \widehat{\lambda}_n \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right]\right) = 1 - \alpha$$

L'intervalle $\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda}_n, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda}_n\right]$ est donc un intervalle de confiance de λ au risque α . □

15. Avec le n -échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) , on construit un nouvel intervalle de confiance de λ au risque β ($\beta \neq \alpha$), tel que la longueur de cet intervalle soit k ($k > 1$) fois plus petite que celle obtenue avec le risque α .

a) Justifier l'existence de la fonction réciproque Φ^{-1} de Φ .
 Quel est le domaine de définition de Φ^{-1} ?

Démonstration.

La fonction Φ est :

- × continue sur \mathbb{R} , en tant que fonction de répartition d'une v.a.r. à densité,
- × strictement croissante sur \mathbb{R} .

En effet, la fonction Φ est dérivable sur \mathbb{R} car c'est une primitive de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ qui est continue sur \mathbb{R} . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$$

Elle réalise donc une bijection de $] - \infty, +\infty[$ sur $\Phi(] - \infty, +\infty[)$ où :

$$\Phi(] - \infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) \right[=]0, 1[$$

où la dernière égalité est obtenue car Φ est une fonction de répartition.

Ainsi, Φ réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]0, 1[$.

La fonction Φ^{-1} est donc définie sur $]0, 1[$.

Commentaire

- Il est toujours bon de garder en tête que la fonction Φ est bijective. C'est une propriété que l'on utilise fréquemment dans le contexte de l'estimation.
- On pourrait par exemple également s'en servir pour démontrer que le réel u_α existe et est unique. En effet :
 - × la fonction Φ réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]0, 1[$,
 - × $1 - \frac{\alpha}{2} \in]0, 1[$, car $\alpha > 0$.
 On en déduit qu'il existe un unique $u_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. □

b) Établir l'égalité $\beta = 2\Phi\left(\frac{1}{k}\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$.

En déduire que $\beta > \alpha$. Ce dernier résultat était-il prévisible ?

Démonstration.

- Déterminons l'intervalle de confiance de λ au risque β . Notons U_n et V_n les extrémités de ce nouvel intervalle.

D'après l'énoncé, la longueur de cet intervalle est k fois plus petite que celle de risque α . Ainsi :

$$V_n - U_n = \frac{1}{k} \left(\left(X + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}} \right) \widehat{\lambda}_n - \left(X - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}} \right) \widehat{\lambda}_n \right) = 2 \times \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \times \widehat{\lambda}_n$$

L'intervalle de confiance de λ au risque β est donc $\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \right) \widehat{\lambda}_n, \left(1 + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \right) \widehat{\lambda}_n \right]$.

- On obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \right) \widehat{\lambda}_n \leq \lambda \leq \left(1 + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \right) \widehat{\lambda}_n \right] \right) = 1 - \beta$$

Avec le même raisonnement qu'en question 14.c), on a de plus :

$$\mathbb{P} \left(\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \right) \widehat{\lambda}_n \leq \lambda \leq \left(1 + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \right) \widehat{\lambda}_n \right] \right) = \mathbb{P} \left(\left[-\frac{u_\alpha}{k} \leq N_n \leq \frac{u_\alpha}{k} \right] \right)$$

Or, comme $N_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left[-\frac{u_\alpha}{k} \leq N_n \leq \frac{u_\alpha}{k} \right] \right) = \mathbb{P} \left(\left[-\frac{u_\alpha}{k} \leq Z \leq \frac{u_\alpha}{k} \right] \right) = 2\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right) - 1$$

Ainsi :

$$1 - \beta = \mathbb{P} \left(\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \right) \widehat{\lambda}_n \leq \lambda \leq \left(1 + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \right) \widehat{\lambda}_n \right] \right) = 2\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right) - 1$$

$$2\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right) - 1 = 1 - \beta$$

- D'après le point précédent :

$$\text{comme } 2\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right) - 1 = 1 - \beta$$

$$\text{alors } \beta = 2 - 2\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right)$$

$$\text{donc } \beta = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right)\right) = 2\Phi\left(-\frac{u_\alpha}{k}\right)$$

$$\beta = 2\Phi\left(-\frac{u_\alpha}{k}\right)$$

- Enfin, exprimons u_α en fonction de α et Φ^{-1} .

Par définition de u_α :

$$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - \Phi(u_\alpha) = \Phi(-u_\alpha) \Leftrightarrow \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -u_\alpha \Leftrightarrow -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = u_\alpha$$

$$\text{Finalement : } \beta = 2 \Phi\left(-\frac{u_\alpha}{k}\right) = 2 \Phi\left(-\frac{-\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{k}\right) = 2 \Phi\left(\frac{1}{k} \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

- D'après ce qui précède : $\frac{\beta}{2} = \Phi\left(\frac{1}{k} \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$. Ainsi :

$$\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{k} \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

De plus :

comme	$k > 1$	
alors	$\frac{1}{k} < 1$	<i>(par stricte décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$)</i>
donc	$\frac{1}{k} \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) > \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	<i>(car $\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$ (*)</i>
d'où	$\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right) > \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	
ainsi	$\frac{\beta}{2} > \frac{\alpha}{2}$	<i>(par stricte croissance de Φ sur \mathbb{R})</i>
enfin	$\beta > \alpha$	

Détaillons l'argument (*).

$$\begin{aligned} & \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\alpha}{2} < \Phi(0) \quad \text{\textit{(par stricte croissance de } \Phi \text{ sur } \mathbb{R}\text{)}} \\ \Leftrightarrow & \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \alpha < 1 \end{aligned}$$

Or cette dernière inégalité est vraie par définition de α . Ainsi, grâce au raisonnement par équivalence, la première aussi.

On a bien : $\beta > \alpha$.

Ce résultat était prévisible car plus la précision de l'estimation exigée augmente (*i.e.* plus la longueur de l'intervalle de confiance est faible), plus le niveau de risque augmente (*i.e.* plus le niveau de confiance diminue) □

Dans les questions 16 à 18, on suppose que $\lambda = 1$.

16. On pose pour tout n de \mathbb{N}^* : $T_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Pour tout n de \mathbb{N}^* , pour tout réel x positif ou nul, on pose :

$$g_n(x) = \int_0^x F_{T_n}(t) dt \quad \text{et} \quad h_n(x) = \int_0^x t f_{T_n}(t) dt$$

Commentaire

- Notons que l'énoncé définit ici des objets avant que l'on puisse statuer sur leur existence : on ne sait ni si la v.a.r. T_n est à densité, ni si les fonctions F_{T_n} et f_{T_n} sont continues par morceaux sur $[0, x]$. La question suivante s'effectuera donc en supposant que T_n est une v.a.r. à densité, de densité f_{T_n} et que la fonction F_{T_n} est suffisamment régulière, en l'occurrence de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur le segment $[0, x]$.

- On aurait pu éviter d'effectuer ces hypothèses en énonçant les questions dans l'ordre suivant :

16. a) Déterminer pour tout réel t , l'expression de $F_{T_n}(t)$ en fonction de t .

En déduire que T_n est une v.a.r. à densité. On note f_{T_n} une de ses densités.

b) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $F_{T_n}(x)$ et $g_n(x)$.

c) Établir pour tout n supérieur ou égal à 2, la relation : $g_{n-1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n} F_{T_n}(x)$.

a) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $F_{T_n}(x)$ et $g_n(x)$.

Démonstration.

Soit $x \in [0, +\infty[$. On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = f_{T_n}(t) & v(t) = F_{T_n}(t) \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide **sous réserve** que les fonctions u et v soient de classe \mathcal{C}^1 (par morceaux) sur $[0, x]$. On obtient :

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \int_0^x t f_{T_n}(t) dt \\ &= [t F_{T_n}(t)]_0^x - \int_0^x 1 \times F_{T_n}(t) dt \\ &= x F_{T_n}(x) - g_n(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, h_n(x) = x F_{T_n}(x) - g_n(x)}$$

□

b) Déterminer pour tout réel t , l'expression de $F_{T_n}(t)$ en fonction de t .

Établir pour tout n supérieur ou égal à 2, la relation : $g_{n-1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n} F_{T_n}(x)$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord : $\forall i \in [1, n], X_i(\Omega) = [0, +\infty[$ (car $X_i \leftrightarrow \mathcal{E}(1)$).

$$\boxed{\text{Ainsi : } T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

• Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $t \in]-\infty, 0[$, alors $[T_n \leq t] = \emptyset$ car $T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Ainsi :

$$F_{T_n}(t) = \mathbb{P}([T_n \leq t]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

× si $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([T_n \leq t]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq t]\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}([X_i \leq t]) && \text{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes)} \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}([X_1 \leq t]) && \text{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \text{ ont même loi)} \\ &= (\mathbb{P}([X_1 \leq t]))^n \\ &= (1 - e^{-t})^n && \text{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \text{ et } t \geq 0) \end{aligned}$$

Finalement : $F_{T_n} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (1 - e^{-t})^n & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

Commentaire

Démontrons que T_n est une v.a.r. à densité.

• La fonction F_{T_n} est continue :

× sur $] - \infty, 0[$ en tant que fonction constante,

× sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $F_{T_n} = u_2 \circ u_1$ de :

- $u_1 : x \mapsto 1 - e^{-x}$ qui est :
 - ▶ continue sur $]0, +\infty[$,
 - ▶ telle que : $u_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
- $u_2 : y \mapsto y^n$ qui est continue sur \mathbb{R} .

× en 0. En effet :

- d'une part : $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_{T_n}(x) = 0$
- d'autre part : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_{T_n}(x) = F_{T_n}(0) = (1 - e^{-0})^n = 0$.

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_{T_n}(x) = F_{T_n}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_{T_n}(x)$$

La fonction F_{T_n} est continue sur \mathbb{R} .

• La fonction F_{T_n} est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

On en déduit que F_{T_n} est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0.

La v.a.r. T_n est donc une v.a.r. à densité.
--

Commentaire

On a démontré que :

- × la fonction F_{T_n} est continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, elle l'est alors sur le segment $[0, x]$. La fonction g_n est donc bien définie.
- × la fonction F_{T_n} est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$. Elle est même de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur $[0, +\infty[$. Ainsi f_{T_n} est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, elle l'est alors sur le segment $[0, x]$. La fonction h_n est donc bien définie.
- × l'IPP de la question précédente est valide puisque, comme F_{T_n} est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur $[0, x]$, la fonction v l'est aussi.

- Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$. Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 g_{n-1}(x) - g_n(x) &= \int_0^x F_{T_{n-1}}(t) dt - \int_0^x F_{T_n}(t) dt \\
 &= \int_0^x F_{T_{n-1}}(t) - F_{T_n}(t) dt \\
 &= \int_0^x (1 - e^{-t})^{n-1} - (1 - e^{-t})^n dt \quad (\text{car } (n-1, n) \in (\mathbb{N}^*)^2) \\
 &= \int_0^x (1 - e^{-t})^{n-1} (\cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-t})) dt \\
 &= \int_0^x e^{-t} (1 - e^{-t})^{n-1} dt \\
 &= \left[\frac{1}{n} (1 - e^{-t})^n \right]_0^x \\
 &= \frac{1}{n} (1 - e^{-x})^n = \frac{1}{n} F_{T_n}(x) \quad (\text{car } x \geq 0)
 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \forall x \in [0, +\infty[, g_{n-1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n} F_{T_n}(x)$$

□

- c) En déduire que pour tout n de \mathbb{N}^* , pour tout réel x positif ou nul, l'expression de $g_n(x)$ en fonction de $x, F_{T_1}(x), F_{T_2}(x), \dots, F_{T_n}(x)$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0, +\infty[$.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \quad g_{k-1}(x) - g_k(x) = \frac{1}{k} F_{T_k}(x)$$

- En sommant les égalités précédentes pour k variant de 2 à n , on obtient :

$$\sum_{k=2}^n (g_{k-1}(x) - g_k(x)) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} F_{T_k}(x)$$

||

$$g_1(x) - g_n(x) \qquad \qquad \qquad (\text{par télescope})$$

- De plus :

$$\begin{aligned}
 g_1(x) &= \int_0^x F_{T_1}(t) dt = \int_0^x 1 - e^{-t} dt \\
 &= [t + e^{-t}]_0^x \\
 &= x + e^{-x} - 1 = x - F_{T_1}(x) \quad (\text{car } x \geq 0)
 \end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
 g_n(x) &= x - F_{T_1}(x) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} F_{T_k}(x) \\
 &= x - \frac{1}{1} F_{T_1}(x) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} F_{T_k}(x) \\
 &= x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} F_{T_k}(x)
 \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, +\infty[, g_n(x) = x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} F_{T_k}(x)$

□

d) Montrer que $F_{T_n}(x) - 1$ est équivalent à $-ne^{-x}$, lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$F_{T_n}(x) - 1 = (1 - e^{-x})^n - 1$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. D'où : $(1 - e^{-x})^n - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} n \times (-e^{-x})$.

Finalement : $F_{T_n}(x) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -ne^{-x}$.

□

e) Dédurre des questions **c)** et **d)** l'existence de $\mathbb{E}(T_n)$ et montrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{T_n}(t) dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\int_{-\infty}^{+\infty} t^x f_{T_n}(t) dt$.
- Tout d'abord, comme $T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$, la fonction f_{T_n} est nulle en dehors de $[0, +\infty[$. Ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{T_n}(t) dt = \int_0^{+\infty} t f_{T_n}(t) dt$$

On en déduit que T_n admet une espérance si et seulement si la fonction h_n admet une limite quand x tend vers $+\infty$.

- Soit $x \in [0, +\infty[$. D'après **16.a**) :

$$\begin{aligned} h_n(x) &= x F_{T_n}(x) - g_n(x) \\ &= x F_{T_n}(x) - \left(x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} F_{T_k}(x) \right) \quad (\text{d'après } \mathbf{16.c}) \\ &= x (F_{T_n}(x) - 1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} F_{T_k}(x) \end{aligned}$$

Or :

× d'après la question précédente : $F_{T_n}(x) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -n e^{-x}$. D'où :

$$x (F_{T_n}(x) - 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -n x e^{-x}$$

Comme, par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -n x e^{-x} = 0$, on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x (F_{T_n}(x) - 1) = 0$$

× pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction F_{T_k} est une fonction de répartition. On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{T_k}(x) = 1$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} F_{T_k}(x) = \frac{1}{k}$. Et enfin :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} F_{T_k}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (\text{car cette somme est finie})$$

On en déduit que la fonction h_n admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

La v.a.r. T_n admet donc une espérance.

- De plus :

$$\mathbb{E}(T_n) = \int_0^{+\infty} t f_{T_n}(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

□

17. On veut étudier dans cette question la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(G_n)_{n \geq 1}$ définie par : pour tout n de \mathbb{N}^* , $G_n = T_n - \mathbb{E}(T_n)$.

On pose pour tout n de \mathbb{N}^* : $\gamma_n = -\ln(n) + \mathbb{E}(T_n)$ et on admet sans démonstration que la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ est convergente ; on note γ sa limite.

a) Montrer que pour tout x réel et n assez grand, on a : $F_{G_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x+\gamma_n)} \right)^n$.

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après **16.b**) : $T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

Comme $G_n = T_n - \mathbb{E}(T_n)$, on en déduit : $G_n(\Omega) \subset [-\mathbb{E}(T_n), +\infty[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

Tout d'abord : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\mathbb{E}(T_n) = -\infty$. En effet :

× d'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

× la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not< 1$). Elle est donc divergente. Comme c'est une série à termes positifs, sa suite des sommes partielles associée diverge vers $+\infty$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\mathbb{E}(T_n) = -\infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq n_0$, $x \geq -\mathbb{E}(T_n)$.

Soit $n \geq n_0$.

$$\begin{aligned}
 F_{G_n}(x) &= \mathbb{P}([T_n - \mathbb{E}(T_n) \leq x]) \\
 &= \mathbb{P}([T_n \leq x + \mathbb{E}(T_n)]) \\
 &= F_{T_n}(x + \mathbb{E}(T_n)) \\
 &= (1 - e^{-(x + \mathbb{E}(T_n))})^n && \text{(car, comme } n \geq n_0 : \\
 & && x + \mathbb{E}(T_n) \geq 0) \\
 &= (1 - e^{-(x + \gamma_n + \ln(n))})^n && \text{(par définition de } \gamma_n) \\
 &= (1 - e^{-(x + \gamma_n)} e^{-\ln(n)})^n \\
 &= \left(1 - \frac{e^{-(x + \gamma_n)}}{e^{\ln(n)}}\right)^n \\
 &= \left(1 - \frac{e^{-(x + \gamma_n)}}{n}\right)^n
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour n assez grand ($n \geq n_0$) : $F_{G_n} : x \mapsto \left(1 - \frac{e^{-(x + \gamma_n)}}{n}\right)^n$.

□

b) En déduire que pour tout x réel, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{G_n}(x) = e^{-e^{-(x + \gamma)}}$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Soit $n \geq n_0$.

$$F_{G_n}(x) = \left(1 - \frac{e^{-(x + \gamma_n)}}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x + \gamma_n)}\right)\right)$$

- D'après l'énoncé : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \gamma$.

Par continuité de la fonction \exp en $-(x + \gamma)$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-(x + \gamma_n)} = e^{-(x + \gamma)}$.

- On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} e^{-(x + \gamma_n)} = 0$ Ainsi :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x + \gamma_n)}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n} e^{-(x + \gamma_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n} e^{-(x + \gamma)} \quad (\text{car } e^{-(x + \gamma)} \neq 0)$$

D'où :

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x + \gamma_n)}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \cancel{n} \times \left(-\frac{1}{\cancel{n}} e^{-(x + \gamma)}\right) = -e^{-(x + \gamma)}$$

- Par continuité de la fonction \exp en $-e^{-(x+\gamma)}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x+\gamma n)} \right) \right) = \exp \left(-e^{-(x+\gamma)} \right)$$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{G_n}(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}$.

□

- c) Montrer que la fonction $F_G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F_G : x \mapsto e^{-e^{-(x+\gamma)}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire G à densité. Conclure.

Démonstration.

- Démontrons que F_G est une fonction de répartition.

× La fonction F_G est continue sur \mathbb{R} car elle est la composée $F_G = u_2 \circ u_1$ de :

- $u_1 : x \mapsto -e^{-(x+\gamma)}$ qui est :

- ▶ continue sur \mathbb{R} ,
- ▶ telle que : $u_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

- $u_2 : x \mapsto e^x$ qui est continue sur \mathbb{R} .

En particulier, F_G est continue à droite en tout point de \mathbb{R} .

× La fonction F_G est dérivable sur \mathbb{R} , par des arguments similaires à ceux de la continuité sur cet intervalle.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F'_G(x) = e^{-(x+\gamma)} e^{-e^{-(x+\gamma)}} > 0$$

La fonction F_G est donc (strictement) croissante sur \mathbb{R} .

× Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-(x+\gamma)} = +\infty$, alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-e^{-(x+\gamma)}} = 0$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_G(x) = 0$.

× Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-(x+\gamma)} = 0$, alors, par continuité de \exp en 0 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-e^{-(x+\gamma)}} = e^0 = 1$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_G(x) = 1$.

La fonction F_G est donc la fonction de répartition d'une v.a.r. notée G .

- Démontrons que G est une v.a.r. à densité.

× La fonction F_G est continue sur \mathbb{R} .

× La fonction F_G est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , par des arguments similaires à ceux de la continuité sur cet intervalle.

La v.a.r. G est une v.a.r. à densité.

- D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{G_n}(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}} = F_G(x)$$

On en déduit : $G_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} G$.

Commentaire

- Le programme officiel liste certaines propriétés d'une fonction de répartition F :

- 1) F est continue à droite en tout point,
- 2) F est croissante sur \mathbb{R} ,
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Cependant, il n'est pas précisé qu'il s'agit là d'une caractérisation d'une fonction de répartition : toute fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés **1.**, **2.**, **3.** et **4.** peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

- À l'époque de ce sujet, la caractérisation ci-dessus était inscrite dans le programme (ce n'est plus le cas). Cependant, son utilisation semble toujours apparaître aux concours. Plus précisément, elle semble nécessaire pour traiter des questions portant sur la convergence en loi (comme cette question) présentes dans les sujets EML 2016 et 2017. Il est donc conseillé de connaître la caractérisation ci-dessus. □

18. a) Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y définie par $Y = F_X(X)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
 Y(\Omega) &= (F_X(X))(\Omega) = F_X(X(\Omega)) \\
 &= F_X(]-\infty, +\infty[) \\
 &=]\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x)[\quad (\text{par continuité } (*) \text{ et stricte} \\
 &\hspace{15em} \text{croissance de } F_X \text{ sur } \mathbb{R}) \\
 &=]0, 1[\quad (\text{car } F_X \text{ est une fonction} \\
 &\hspace{15em} \text{de répartition})
 \end{aligned}$$

Précisons que l'assertion (*) est vraie (la fonction F_X est bien continue sur \mathbb{R}), car F_X est la fonction de répartition de X qui est une v.a.r. à densité.

$$Y(\Omega) =]0, 1[$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :

× si $x \in]-\infty, 0]$, alors $[Y \leq x] = \emptyset$ (car $Y(\Omega) =]0, 1[$). D'où :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

× si $x \in]0, 1[$, alors :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([F_X(X) \leq x])$$

Or la fonction F_X est :

- continue sur \mathbb{R} , car c'est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité,
- strictement croissante sur \mathbb{R} , d'après l'énoncé.

Elle réalise donc une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $F_X(]-\infty, +\infty[) =]0, 1[$.

En particulier, F_X admet une bijection réciproque F_X^{-1} strictement croissante sur $]0, 1[$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 F_Y(x) &= \mathbb{P}([F_X(X) \leq x]) \\
 &= \mathbb{P}([F_X^{-1}(F_X(X)) \leq F_X^{-1}(x)]) \quad (\text{par stricte croissance de } F_X^{-1} \text{ sur }]0, 1[) \\
 &= \mathbb{P}([X \leq F_X^{-1}(x)]) \\
 &= F_X(F_X^{-1}(x)) \\
 &= x \quad (\text{par définition de } F_X^{-1})
 \end{aligned}$$

× si $x \in [1, +\infty[$, alors $[Y \leq x] = \Omega$ (car $Y(\Omega) =]0, 1[$). D'où :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Finalemnt : $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{U}(]0, 1[)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

Ainsi : $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[)$.

□

- b) Écrire une fonction **Scilab** nommée **Gumbel** qui permet de simuler la variable aléatoire G .
 On supposera que la constante γ est définie en langage **Scilab** par une constante **gamma**.
 On rappelle que la fonction **Scilab** **rand()** permet de simuler la loi uniforme sur $]0, 1[$.

Démonstration.

- On note U une v.a.r. de loi $\mathcal{U}(]0, 1[)$. D'après la question précédente, la v.a.r. $F_X(X)$ suit la même loi que U .

On en déduit que $F_X^{-1}(U)$ suit la même loi que X .

- Pour simuler la v.a.r. X , on cherche donc à simuler $F_X^{-1}(U)$. Commençons alors par déterminer F_X^{-1} . Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned}
 y = F_X(x) &\Leftrightarrow y = e^{-e^{-(x+\gamma)}} \\
 &\Leftrightarrow \ln(y) = -e^{-(x+\gamma)} \quad (\text{par bijectivité de } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\
 &\Leftrightarrow -\ln(y) = e^{-(x+\gamma)} \\
 &\Leftrightarrow \ln(-\ln(y)) = -(x+\gamma) \quad (\text{par bijectivité de } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\
 &\Leftrightarrow -\ln(-\ln(y)) = x + \gamma \\
 &\Leftrightarrow -\ln(-\ln(y)) - \gamma = x
 \end{aligned}$$

Finalemnt : $F_X^{-1} : y \mapsto -\ln(-\ln(y)) - \gamma$.

- On en déduit la fonction **Scilab** suivante.

```
1 function x = Gumbel()  
2     u = rand()  
3     x = -log(-log(u)) - gamma  
4 endfunction
```

Commentaire

Cette question est une application directe de la **méthode d'inversion** vue en TP. Elle a également été traitée en cours pour démontrer le résultat classique suivant : si U est une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1[)$, alors la v.a.r. $W = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. □