DS9 (version A)

Exercice 1

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose : $u_k = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k$.

1. Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

On considère maintenant une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\,[X = k]\,\big) = u_k$$

2. ***a)*** On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de Y, puis en déduire l'espérance et la variance de X.

b) On rappelle que `grand(1, 1, 'geom', p)` renvoie une simulation d'une variable aléatoire géométrique de paramètre `p`. Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X :

```
function x = SimuX(theta)
    y = ................
    x = ................
endfunction
```

3. Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on introduit $\mathcal{L}$, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathcal{L}(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\,[X_k = x_k]\,\big)$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.
L'objectif est de chosir la valeur de θ qui rend $\mathcal{L}(\theta)$ maximale.

a) Écrire $\ln\left(\mathcal{L}(\theta)\right)$ en fonction de θ et de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

b) On considère la fonction φ définie par :

$$\forall \theta \in\ ]0, +\infty[,\ \varphi(\theta) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n)\ln(1+\theta)$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\widehat{\theta}_n$ et que l'on exprimera en fonction de S_n. Que représente $\widehat{\theta}_n$ pour la fonction $\mathcal{L}$?

On pose dorénavant : $T_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
La variable T_n est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour θ.

c) Vérifier que T_n est un estimateur sans biais de θ.

d) Calculer le risque quadratique $r_\theta(T_n)$ de T_n et vérifier : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.
On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E :

$$i : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & 0_E \end{array} \right.$$

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, \quad f^2 + i \neq \theta, \quad f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. ***a)*** Montrer que f n'est pas bijectif.

b) En déduire que 0 est valeur propre de f, puis montrer qu'il existe u appartenant à E tel que : $u \neq 0_E$ et $f(u) = 0_E$.

Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

2. Montrer : $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

3. Est-ce que f est diagonalisable ?

4. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que : $v \neq 0_E$ et $f^2(v) = -v$.

Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.

5. Montrer : $f(v_3) = -v_2$.

6. ***a)*** Montrer que la famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathscr{B}$.

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C), c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{a\,A + b\,B + c\,C \ / \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

7. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

8. Montrer : $\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ CM = MC\} = \mathcal{F}$

9. ***a)*** Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(a\,A + b\,B + c\,C)^2$.

b) En déduire une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

10. On note $g = f^2 - i$.
Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i.

Exercice 3

Préliminaire

On donne : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.
On considère l'application g définie par :

$$g \ : \ \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + \ln(x) \end{array}$$

1. Montrer que g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule.

On note α l'unique solution de cette équation.

3. Montrer : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Partie A

On note $I = \left[\,\frac{1}{2}, 1\right]$ et on considère l'application f définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}\ln(x) \end{array}$$

4. ***a)*** Montrer que f est strictement croissante sur I.

b) Montrer : $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$.

c) En déduire : $\forall x \in I,\ f(x) \in I$.

5. On considère la suite réelle $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

b) Calculer u_1.

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.

d) Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

e) Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est le réel α.

Partie B

On considère l'application F définie par :

$$F \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (\ x\ ,\ y\ ) & \mapsto & x\,\mathrm{e}^y + y\,\ln(x) \end{array}$$

6. ***a)*** Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x,y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

b) Montrer que F admet un point critique et un seul que l'on exprimera à l'aide du nombre réel α.

7. ***a)*** Déterminer la matrice hessienne de F en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

b) La fonction F admet-elle un extremum local ?

Problème

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

On admet le résultat `(R)` suivant.

> Soient U et V deux variables aléatoires à densité définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_U et f_V. On suppose que les variables aléatoires U et V sont :
>
> × indépendantes,
>
> × telles que f_U et f_V soient bornées.
>
> Alors la variable aléatoire $U+V$ est une variable aléatoire à densité et une densité de $U+V$ est donnée par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
>
> $$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)\, f_V(x-t)\ dt$$

1. Dans la suite, on considère un réel a strictement positif.

a) On note $V = -a\,X_0$. Démontrer que V admet pour fonction de répartition :

$$F_V : x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{\lambda}{a}x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

b) Démontrer que V est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité f_V.

c) On note $U = X_1$. Montrer que la variable $X_1 - a\,X_0$ est une variable à densité dont une densité f_a est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = \int_0^{+\infty} f_U(t)\, f_V(x-t)\ dt$$

d) Soit W une variable aléatoire telle que $W \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\lambda\ \frac{a+1}{a}\right)$.

(i) Démontrer : $\forall x < 0,\ f_a(x) = \dfrac{\lambda}{a+1}\ e^{\frac{\lambda}{a}x}\ \mathbb{E}(W^0)$.

(ii) Démontrer : $\forall x \geqslant 0,\ f_a(x) = \dfrac{\lambda}{a+1}\ e^{\frac{\lambda}{a}x}\ \mathbb{P}\big(\,[W > x]\,\big)$.

(iii) En conclure que l'on peut choisir comme densité de $X_1 - a\,X_0$, la fonction f_a définie par :

$$f_a : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{a+1}\ e^{\lambda\frac{x}{a}} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{\lambda}{a+1}\ e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

e) On pose $T = \dfrac{X_1}{X_0}$ et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Déterminer la fonction de répartition F_T de la variable aléatoire T.

2. On pose $X = \lfloor T \rfloor + 1$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T. On admet également que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([X = n]\big) = \dfrac{1}{n\,(n+1)}$.

3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Donner sans calcul une densité de $-X_0$.

b) Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n et en déduire une densité g_n de Y_n.

c)(i) Déduire de ce qui précède que la variable aléatoire $Y_n - X_0$ est une variable à densité dont une densité h_n vérifie :

$$\forall x < 0,\ h_n(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda\, x} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\ g_n(t)\ dt$$

(ii) Montrer alors : $\forall x < 0,\ h_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\ \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}$.

On pourra procéder par intégration par parties.

4. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \inf\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k > X_0\}$ si cet ensemble n'est pas vide et $Z = 0$ si cet ensemble est vide.

a) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $[Z > n] \cup [Z = 0] = [Y_n \leqslant X_0]$.

b) Montrer : $[Z = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [Y_k \leqslant X_0]$, puis établir : $\mathbb{P}\big([Z = 0]\big) = 0$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([Z = n]\big) = \mathbb{P}\big([Z > n-1]\big) - \mathbb{P}\big([Z > n]\big)$.

d) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, les événements $[X = n]$ et $[Z = n]$ ont même probabilité.

5. **Informatique**.

a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

On pose $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1 - U)$ et on admet que V est une variable aléatoire.

Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U, puis en déduire la loi suivie par la variable aléatoire V.

b) Écrire une fonction **Scilab** dont l'en-tête est `function z = simuZ()` qui simule la variable aléatoire Z.