DS7 (version A)

Exercice 1 (EDHEC 2006)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice unité et O la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(u)$.

Démonstration.

- Soit $v \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $v = (x, y, z)$. Notons $V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
v \in \mathrm{Ker}(f) & \iff & f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \iff & A\,V = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 0 \\ x & + & 4\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ -2\,x & - & 8\,y & - & 6\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 0 \\ & - & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\,x & + & 10\,y & = & -7\,z \\ & - & 2\,y & = & z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + 5\,L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\,x & & & = & -2\,z \\ & - & 2\,y & = & z \end{array} \right.
\end{array}$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Ker}(f) & = & \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x = -z \text{ et } y = -\frac{1}{2}\,z\right\} \\
& = & \left\{(-z, -\frac{1}{2}\,z, z) \ \mid \ z \in \mathbb{R}\right\} \\
& = & \left\{z \cdot (-1, -\frac{1}{2}, 1) \ \mid \ z \in \mathbb{R}\right\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left((-1, -\frac{1}{2}, 1)\right) \ = \ \mathrm{Vect}\,((2, 1, -2))
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(u).}$$

Commentaire

- On démontre dans cette question : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(u)$. En particulier, $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Cela démontre que 0 est bien valeur propre de f et que $\mathrm{Ker}(f) = E_0(g)$ est le sous-espace propre de f associé à cette valeur propre.
- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille $\big((2,1,-2)\big)$ contient seulement 1 vecteur. Cette famille est donc finie, de cardinal 1 (ce qu'on note $\mathrm{Card}\,\big((2,1,-2)\big) = 1$).
- L'ensemble $\mathrm{Vect}\,((2,1,-2))$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires du vecteur $(2,1,-2)$. C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base d'un espace vectoriel, tout vecteur de cet espace vectoriel se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\mathrm{Card}\,\big(\mathrm{Vect}\,((2,1,-2))\big)}$ et $\cancel{\dim\big((2,1,-2)\big)}$ n'ont aucun sens !
- Par ailleurs, il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Si v et $V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ sont deux représentations différentes du même triplet v, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3}_{\in \mathbb{R}^3} \;\cancel{=}\; \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\mathrm{Vect}\,((2,1,-2))}_{\subseteq E_0(f)} \;\cancel{=}\; \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)}_{\subseteq E_0(A)}$$

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I$. Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 0$.

  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_0(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $A\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Si l'on choisit $x \neq 0$, pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on peut choisir $y = \dfrac{1}{2}\,x$ et $z = -x$.

  En prenant par exemple $x = 2$, on obtient : $E_0(A) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

  Cette inclusion est en réalité une égalité. En effet, d'après le théorème du rang :

$$\dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) = \dim\big(E_0(A)\big) + \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\mathrm{rg}(A)}$$

  (par un calcul rapide à l'aide de l'algorithme du pivot)

  Ainsi : $\dim\big(E_0(A)\big) = 3 - 2 = 1$ et l'égalité annoncée est vérifiée.

□

b) La matrice A est-elle inversible ?

Démonstration.
D'après la question précédente : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
On en déduit que f n'est pas injective. Elle n'est donc pas bijective.

$$\boxed{\text{On en conclut que } A \text{, matrice représentative de } f \text{ dans la base } \mathscr{B}\text{, n'est pas inversible.}}$$ □

2. a) Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et tel que $f(v) = u$.

Démonstration.
Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
On cherche un vecteur v dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée vaut 1. On considère donc : $y = 1$.

$$\begin{array}{cl}
 & f(v) = u \\
\iff & A\,V = U \\
\iff & \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 2 \\ x & + & 4\,y & + & 3\,z & = & 1 \\ -2\,x & - & 8\,y & - & 6\,z & = & -2 \end{array} \right. \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 2 \\ & - & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 2 \\ & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\,x & + & 7\,z & = & -8 \\ & - & z & = & 2 \end{array} \right. \qquad \textit{(car } y = 1\textit{)} \\
\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 7\,L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\,x & & & = & 6 \\ & - & z & = & 2 \end{array} \right.
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Le seul vecteur } v \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(v) = u \text{ est } v = (3, 1, -2).}$$ □

b) Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0, 1, -1)$.

Démonstration.
Soit $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $W = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
On cherche un vecteur w dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée vaut 1. On considère donc : $y = 1$.

$$\begin{array}{cl}
 & f(w) = v \\
\iff & A\,W = V \\
\iff & \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
& f(w) = v \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 3 \\ x & + & 4\,y & + & 3\,z & = & 1 \\ -2\,x & - & 8\,y & - & 6\,z & = & -2 \end{array}\right. \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 3 \\ & - & 2\,y & - & z & = & -1 \\ & & 2\,y & + & z & = & -1 \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,x & + & 7\,z & = & -7 \\ & - & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \textit{(car } y = 1\textit{)} \\
\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 7\,L_2}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,x & & & = & 0 \\ & - & z & = & 1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le seul vecteur } w \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(w) = v \text{ est } w = (0,1,-1).}$$

Commentaire

- L'énoncé précise qu'il faut trouver `LE` vecteur w tel que $f(w) = v$. Ainsi, vérifier :
$$f\big((0,1,-1)\big) = (3,1,-2)$$
ne suffit pas. Il faut aussi démontrer qu'il n'y a pas d'autre vecteur qui vérifie cette propriété.
- Si la fonction f était injective, on pourrait facilement démontrer que la propriété de l'énoncé est vérifiée par un seul vecteur. En effet, si s et t vérifie cette propriété, alors :
$$f(s) = v = f(t)$$
et ainsi, par linéarité : $f(s-t) = 0_{\mathbb{R}^3}$. D'où $s - t \in \mathrm{Ker}(f)$.
Et ainsi, si f injective, on en conclut que $s = t$.
- L'intérêt de la formulation de cette question est qu'elle fournit le vecteur v de la question précédente. Cela permet de vérifier le calcul précédent et, le cas échéant, de le rectifier. Qu'on réussisse ou non ces deux questions, on peut faire la suite car la famille (u,v,w) est en fait donnée par l'énoncé.

$\square$

c) Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathscr{B}'$.
On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $\big(u,v,w\big)$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3}$. $(*)$

$$\begin{aligned}
\text{Or :} \qquad (*) \iff & \lambda_1 \cdot (2,1,-2) + \lambda_2 \cdot (3,1,-2) + \lambda_3 \cdot (0,1,-1) = (0,0,0) \\
\iff & (2\,\lambda_1 + 3\,\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, -3\,\lambda_1 - 2\,\lambda_2 - \lambda_3) = (0,0,0) \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,\lambda_1 & + & 3\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -2\,\lambda_1 & - & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } (*) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,\lambda_1 & + & 3\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -2\,\lambda_1 & - & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,\lambda_1 & + & 3\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,\lambda_1 & + & 3\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\right.$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (u,v,w) \text{ est libre.}}$$

- Ainsi, la famille (u, v, w) est :
  - × une famille libre de $\mathbb{R}^3$,
  - × telle que : $\mathrm{Card}\big((u, v, w)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (u,v,w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

□

3. a) Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathscr{B}'$. En déduire la seule valeur propre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- $f(u) \ = \ 0_{\mathbb{R}^3}$ *(car $u \in \mathrm{Ker}(f)$ d'après **1.a)**)*

  Ainsi : $f(u) = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(v) \ = \ u$ *(d'après **2.a)**)*

  Ainsi : $f(v) = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(v)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(w) \ = \ v$ *(d'après **2.b)**)*

  Ainsi : $f(w) = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(w)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } N = \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

- La matrice N est triangulaire supérieure.
  Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux, et $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(N) = \{0\}.}$$

- Démontrons que f n'est pas diagonalisable. On procède par l'absurde.
  Supposons que f est diagonalisable. Il en est alors de même de la matrice A.
  Il existe alors :
  × $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible,
  × $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A,

  telles que : $A = PDP^{-1}$. Or $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. Donc :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

  Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

b) Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1}, puis en déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a : $A^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

Démonstration.

- D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ A & & P & N & P^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{A = PNP^{-1}}$$

- Par une récurrence immédiate, on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PN^kP^{-1}$.
- Or :

$$N^2 = N \times N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  et :

$$N^3 = N \times N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On en déduit par une récurrence immédiate : } \forall k \geqslant 3,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}. \\ \textit{(on peut aussi écrire : } \forall k \geqslant 3,\ N^k = N^3 \times N^{k-3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \end{array}}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall k \geqslant 3,\ A^k = P \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \times P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

□

4. On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A),

a) Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = \text{Vect}\left(I, N, N^2\right)$.
On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $C_N = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MN = NM\}$.

  Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in \mathbb{R}^9$ tel que : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
M \in C_N & \Leftrightarrow & MN = NM \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -d & a-e & b-f \\ -g & d-h & e-i \\ 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} d = g = h = 0 \\ a = e = i \\ b = f \end{array} \right.
\end{array}$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
C_N & = & \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid d = g = h = 0 \text{ et } a = e = i \text{ et } b = f \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
& = & \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
& = & \text{Vect}\left(I, N, N^2\right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } C_N \text{ est un espace vectoriel et } C_N = \text{Vect}\left(I, N, N^2\right).}$$

□

b) Établir : $M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N$.
En déduire : $C_A = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right)$. Quelle est la dimension de C_A ?

Démonstration.
Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} M \in C_A & \Leftrightarrow & M \text{ commute avec } A & \\ & \Leftrightarrow & AM = MA & \\ & \Leftrightarrow & PNP^{-1}M = MPNP^{-1} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.b)}}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}(PNP^{-1}M) = P^{-1}(MPNP^{-1}) & \textit{(en multipliant à gauche par } P^{-1}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & NP^{-1}M = P^{-1}MPNP^{-1} & \\ & \Leftrightarrow & (NP^{-1}M)P = (P^{-1}MPNP^{-1})P & \textit{(en multipliant à droite par } P^{-1}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & N(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)N & \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}MP \text{ commute avec } N & \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}MP \in C_N & \end{array}$$

$$\boxed{M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N}$$

- D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{rcl} M \in C_A & \Leftrightarrow & P^{-1}MP \in C_N \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}MP \in \text{Vect}\left(I, N, N^2\right) \\ & \Leftrightarrow & \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ P^{-1}MP = a \cdot I + b \cdot N + c \cdot N^2 \\ & \Leftrightarrow & \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\quad M \begin{array}[t]{cl} = & P\ (a \cdot I + b \cdot N + c \cdot N^2)\ P^{-1} \\ = & (a \cdot P + b \cdot PN + c \cdot PN^2)\ P^{-1} \\ = & a \cdot PP^{-1} + b \cdot PNP^{-1} + c \cdot PN^2P^{-1} \\ = & a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2 \end{array} \\ & \Leftrightarrow & M \in \text{Vect}\left(I, A, A^2\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } C_A = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right).}$$

- Démontrons que la famille (I, A, A^2) est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot A + \lambda_3 \cdot A^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ $(*)$. Or :

$$\begin{array}{rcll} \lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot A + \lambda_3 \cdot A^2 & = & \lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot PNP^{-1} + \lambda_3 \cdot PN^2P^{-1} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.b}}\textit{)} \\ & = & P\ \left(\lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot N + \lambda_3 \cdot N^2\right)\ P^{-1} & \textit{(car } I = PP^{-1}\textit{)} \\ & = & P\ \left(\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\ P^{-1} & \\ & = & P\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}\ P^{-1} & \end{array}$$

Ainsi, d'après $(*)$: $P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} P^{-1} \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

On en déduit, par multiplication à gauche par P^{-1} puis à droite par P :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

On en déduit : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (I, A, A^2) \text{ est libre.}}$$

- Ainsi, la famille (I, A, A^2) est :
  - × génératrice de C_A,
  - × libre.

  La famille (I, A, A^2) est donc une base de C_A.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(C_A) = \mathrm{Card}((I, A, A^2)) = 3.}$$

□

Exercice 2 (EML 2012)

Partie I : Étude d'une fonction d'une variable réelle

On considère l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.
La fonction f est continue :

- sur $]0, +\infty[$ car elle est le produit $f = f_1 \times f_2$ de :
  - × $f_1 : t \mapsto t$ qui est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale,
  - × $f_2 : t \mapsto \ln(t)$ qui est continue sur $]0, +\infty[$.
- en 0. En effet, par croissances comparées : $\lim\limits_{t \to 0^+} t \ \ln(t) = 0$. Ainsi :

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = 0 = f(0)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc continue sur } [0, +\infty[.}$$

□

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0, +\infty[$.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\\ \text{en tant que produit de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.\end{array}}$$

Soit $t \in]0, +\infty[$.

$$f'(t) \ = \ 1 \times \ln(t) + \cancel{t} \times \frac{1}{\cancel{t}} \ = \ \ln(t) + 1$$

$$\boxed{\forall t \in]0, +\infty[, \ f'(t) = \ln(t) + 1}$$

□

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.

- Par produit de limites : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} t \ \ln(t) = +\infty$.
- Soit $t \in]0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} f'(t) \geqslant 0 & \Leftrightarrow & \ln(t) + 1 \geqslant 0 & \\ & \Leftrightarrow & \ln(t) \geqslant -1 & \\ & \Leftrightarrow & t \geqslant \mathrm{e}^{-1} & \textit{(car } x \mapsto e^x \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{array}$$

- On a de plus :

$$f(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1} \ \ln(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1} \times (-1) = -\mathrm{e}^{-1}$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		e^{-1}		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Montrer que f est convexe sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.
D'après *3.* : $\forall t \in]0, +\infty[$, $f'(t) = \ln(t) + 1$.
Or, la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
D'où f' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est convexe sur }]0, +\infty[.}$$

Commentaire

On aurait aussi pu résoudre cette question de la manière suivante.
1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
2. Démontrer : $\forall t \in]0, +\infty[$, $f''(t) \geqslant 0$.

5. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O et préciser celle-ci.

Démonstration.
Soit $t \in]0, +\infty[$.

$$\tau_0(f)(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{\cancel{t} \ln(t)}{\cancel{t}} = \ln(t) \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la courbe } \Gamma \text{ admet une demi-tangente verticale en } 0.}$$

b) Déterminer les points d'intersection de Γ et, de l'axe des abscisses.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in]0, +\infty| \times \mathbb{R}$.
Le point (x, y) est un point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & f(x) \\ y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} f(x) & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

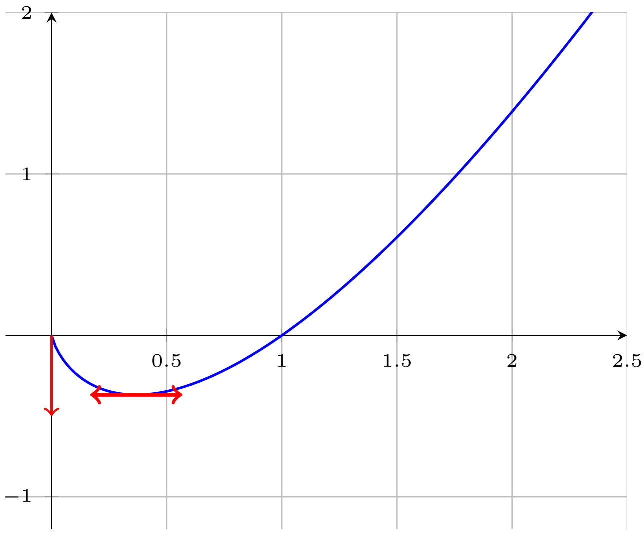
Or :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} x = 0 \\ \texttt{OU} \\ \ln(x) = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x = 0 \\ \texttt{OU} \\ x = 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Donc les points d'intersection de } \Gamma \text{ avec l'axe des abscisses sont } (0, 0) \text{ et } (1, 0).}$$

c) Tracer l'allure de Γ. On admet : $0,36 \leqslant e^{-1} < 0,37$.

Démonstration.



□

Partie II : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ par :

$$F(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$.

Démonstration.
D'après l'énoncé, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$. Elle admet donc des dérivées partielles premières sur $]0,+\infty[^2$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \\ \partial_1(F)(x,y) = \dfrac{1}{xy} - \dfrac{\ln(y)}{x^2} \text{ et } \partial_2(F)(x,y) = -\dfrac{\ln(x)}{y^2} + \dfrac{1}{xy} \end{array}}$$

□

7. Montrer que (e, e) est un point critique de F.

Démonstration.
On vérifie : $\nabla(F)(e,e) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.

$$\partial_1(F)(e,e) = \frac{1}{e \times e} - \frac{\ln(e)}{e^2} = \cancel{\frac{1}{e^2}} - \cancel{\frac{1}{e^2}} = 0$$

De même : $\partial_2(F)(e,e) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } (e,e) \text{ est un point critique de } F.}$$

Commentaire

Pour cette question, il ne fallait surtout pas perdre du temps à déterminer l'ensemble des points critiques de F.
Comme d'habitude, il est très important de bien lire la question posée :
- × si l'énoncé demande de montrer qu'un point (x_0, y_0) est un point critique de f, alors on vérifie simplement : $\nabla(f)(x_0, y_0) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
- × si l'énoncé demande de déterminer l'ensemble des points critiques de f, alors on résout le système : $\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$, d'inconnue $(x, y) \in \mathcal{D}_f$.

□

8. Calculer les dérivées partielles secondes de F en tout (x, y) de $]0, +\infty[^2$.
Est-ce que F admet, un extremum local en (e, e) ?

Démonstration.

- D'après l'énoncé, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$. Elle admet donc des dérivées partielles secondes sur $]0, +\infty[^2$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall (x,y) \in\ ]0,+\infty[^2, \\ \partial^2_{1,1}(F)(x,y) = -\dfrac{1}{yx^2} + 2\,\dfrac{\ln(y)}{x^3}, \quad \partial^2_{1,2}(F)(x,y) = -\dfrac{1}{xy^2} - \dfrac{1}{yx^2} \\ \partial^2_{2,1}(F)(x,y) = -\dfrac{1}{xy^2} - \dfrac{1}{yx^2} \quad \text{et} \quad \partial^2_{2,2}(F)(x,y) = 2\,\dfrac{\ln(x)}{y^3} - \dfrac{1}{xy^2} \end{array}}$$

- Calculons d'abord $\nabla^2(F)(\mathrm{e}, \mathrm{e})$.

$$\nabla^2(F)(\mathrm{e},\mathrm{e}) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(F)(\mathrm{e},\mathrm{e}) & \partial^2_{1,2}(F)(\mathrm{e},\mathrm{e}) \\ \partial^2_{2,1}(F)(\mathrm{e},\mathrm{e}) & \partial^2_{2,2}(F)(\mathrm{e},\mathrm{e}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\mathrm{e}^3} + 2\,\dfrac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}^3} & -\dfrac{1}{\mathrm{e}^3} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^3} \\ -\dfrac{1}{\mathrm{e}^3} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^3} & 2\,\dfrac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}^3} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3} & -2\,\mathrm{e}^{-3} \\ -2\,\mathrm{e}^{-3} & \mathrm{e}^{-3} \end{pmatrix}$$

- Déterminons ensuite les valeurs propres de $H = \nabla^2(F)(\mathrm{e}, \mathrm{e})$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \det(H - \lambda\, I_2) & = & \det\left(\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3} - \lambda & -2\,\mathrm{e}^{-3} \\ -2\,\mathrm{e}^{-3} & \mathrm{e}^{-3} - \lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & (\mathrm{e}^{-3} - \lambda)^2 - (2\mathrm{e}^{-3})^2 \\ & = & \left((\mathrm{e}^{-3} - \lambda) + 2\,\mathrm{e}^{-3}\right)\,\left((\mathrm{e}^{-3} - \lambda) - 2\,\mathrm{e}^{-3}\right) \\ & = & (-\lambda + 3\,\mathrm{e}^{-3})\,(-\lambda - ee^{-3}) \ = \ (\lambda - 3\,\mathrm{e}^{-3})\,(\lambda + \mathrm{e}^{-3}) \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est valeur propre de } H & \Leftrightarrow & H - \lambda\, I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(H - \lambda\, I_2) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (\lambda - 3\,\mathrm{e}^{-3})\,(\lambda + \mathrm{e}^{-3}) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = 3\,\mathrm{e}^{-3} \ \texttt{OU} \ \lambda = -\mathrm{e}^{-3} \end{array}$$

On en déduit : $\mathrm{Sp}(\nabla^2(F)(\mathrm{e}, \mathrm{e})) = \{-\mathrm{e}^{-3}, 3\mathrm{e}^{-3}\}$.

Or : $-\mathrm{e}^{-3} < 0$ et $3\mathrm{e}^{-3} > 0$.

$$\boxed{\text{D'où } (\mathrm{e}, \mathrm{e}) \text{ n'est pas un extremum local de } F \text{ (c'est un point col).}}$$

□

Exercice 3 (EDHEC 2020)

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$, où σ est strictement positif.
On rappelle que la fonction $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de X et on note F_X la fonction de répartition de X, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\ dt$$

1. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_X(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f_X(t)\ dt$$

Comme les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-x} f_X(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt$ sont convergentes, on effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{et} \quad dt = -\ du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ t = -x \ \Rightarrow\ u = x \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_{-\infty}^{-x} f_X(t)\ dt & = & \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f_X(-u)\ du & \\ & = & \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f_X(u)\ du & \textit{(car } f_X \textit{ est paire)} \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\ du - \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\ du & \\ & = & 1 - F_X(x) & \textit{(car } f_X \textit{ est une densité de probabilité)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(-x) = 1 - F_X(x)}$$

□

2. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

a) Montrer que la fonction de répartition de Y est la fonction, notée F_Y, définie par :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 2\,F_X(x) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition de la v.a.r. Y : $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in]-\infty, 0[$, alors : $[Y \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$). D'où :

$$F_Y(x) \; = \; \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \; = \; \mathbb{P}(\varnothing) \; = \; 0$$

  × si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) & \\ & = & F_X(x) - F_X(-x) & \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ & = & F_X(x) - \big(1 - F_X(x)\big) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & 2\,F_X(x) - 1 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 2\,F_X(x) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. .}$$

□

b) En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y.

Démonstration.

- La fonction F_Y est continue :
  × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  × sur $]0, +\infty[$ en tant que transformée affine de F_X qui est continue sur cet intervalle,
  × en 0. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0$ (par définition de F_Y).
    - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x) = 2\,F_X(0) - 1 = 2\,\dfrac{1}{2} - 1 = 0$

    Ainsi :

$$\lim_{x \to 0^-} F_Y(x) \; = \; F_Y(0) \; = \; \lim_{x \to 0^+} F_Y(x)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } F_Y \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Commentaire

On utilise ici une des propriétés de la v.a.r. X de loi $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$: $F_X(0) = \dfrac{1}{2}$. On rappelle que la démonstration s'effectue comme suit.

- Comme f_X est une densité, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt$ est convergente.
- Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt & = & 2\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt & \textit{(car } f_X \textit{ est paire)} \\ & = & 2\,F_X(0) & \end{array}$$

- La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{On en déduit que } F_Y \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } Y \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f_Y de Y, on dérive sa fonction de répartition F_Y sur les intervalles **ouverts** $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × Si $x \in]-\infty, 0[$, alors :
  $$f_Y(x) \;=\; F_Y'(x) \;=\; 0$$
  × Si $x \in]0, +\infty[$, alors :
  $$f_Y(x) \;=\; F_Y'(x) \;=\; 2\,F'(x) \;=\; 2\,f_X(x) \;=\; \frac{2}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}}\ \exp\left(-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}\right)$$
  × On choisit enfin : $f_Y(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } f_Y : \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}}\ \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\,\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

□

c) Montrer que Y possède une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Y) = \sigma\,\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f_Y(t)\,dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\,f_Y(t)\,dt$.
- Tout d'abord, comme la fonction f_Y est nulle en dehors de $]0, +\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f_Y(t)\,dt \;=\; \int_0^{+\infty} t\,f_Y(t)\,dt$$
- De plus, la fonction $t \mapsto t\,f_Y(t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f_Y(t)\,dt$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.
- Soit $B \in]0, +\infty[$.
$$\begin{aligned}
\int_0^B t\,f_Y(t)\,dt \;&=\; \int_0^B t\,\frac{2}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}}\ \exp\left(-\frac{t^2}{2\,\sigma^2}\right)\ dt && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&=\; \frac{2}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}}\ \int_0^B t\ \exp\left(-\frac{t^2}{2\,\sigma^2}\right)\ dt \\
&=\; \frac{2}{\cancel{\sigma}\,\sqrt{2\,\pi}}\ \left[\,-\sigma^{\cancel{2}}\ \exp\left(-\frac{t^2}{2\,\sigma^2}\right)\,\right]_0^B \\
&=\; -\frac{2\,\sigma}{\sqrt{2\,\pi}}\ \exp\left(-\frac{B^2}{2\,\sigma^2}\right) + \frac{2\,\sigma}{\sqrt{2\,\pi}}
\end{aligned}$$

- Or, comme $2\,\sigma^2 > 0$: $\lim\limits_{B \to +\infty} \exp\left(-\dfrac{B^2}{2\,\sigma^2}\right) = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } Y \text{ admet une espérance et :}\\ \mathbb{E}(Y) \;=\; \dfrac{2\,\sigma}{\sqrt{2\,\pi}} \;=\; \sigma\,\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}.\end{array}}$$

□

3. On suppose, dans cette question seulement, que σ est inconnu et on se propose de l'estimer.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ composé de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et ayant toutes la même loi que Y.
On note S_n la variable aléatoire définie par : $S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_i$.

a) Montrer que S_n est un estimateur de σ, donner la valeur de son biais, puis proposer un estimateur sans biais de σ, que l'on notera T_n, construit de façon affine à partir de S_n.

Démonstration.

- La v.a.r. $S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ s'exprime :
  × à l'aide d'un n-échantillon $(Y_1, \dots, Y_n)$ de la v.a.r. Y,
  × sans mention du paramètre σ.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } S_n \text{ est donc un estimateur de } \sigma.}$$

- La v.a.r. S_n admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une. Elle admet donc un biais.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(S_n) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\right) & \\[2ex]
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\[2ex]
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma\,\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} & \textit{(d'après la question précédente)} \\[2ex]
& = & \dfrac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\,\sigma\,\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } b_\sigma(S_n) = \mathbb{E}(S_n) - \sigma = \sigma\left(\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} - 1\right).}$$

- D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{lrcll}
 & \mathbb{E}(S_n) & = & \sigma\,\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} & \\[2ex]
\text{donc} & \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\mathbb{E}(S_n) & = & \sigma & \\[2ex]
\text{d'où} & \mathbb{E}\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,S_n\right) & = & \sigma & \textit{(par linéarité de l'espérance)}
\end{array}$$

  On pose alors : $T_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,S_n$.

× La v.a.r. $T_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ s'exprime :

- à l'aide d'un n-échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de la v.a.r. Y,
- sans mention du paramètre σ.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ S_n \text{ est donc un estimateur de } \sigma.}$$

× La v.a.r. T_n admet une espérance en tant que transformée linéaire de la v.a.r. S_n qui en admet une. De plus, d'après les équivalences précédentes :

$$\mathbb{E}(T_n) \ = \ \mathbb{E}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ S_n\right) \ = \ \sigma$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } T_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ S_n \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma.}$$

□

b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X, puis déterminer $\mathbb{E}(Y^2)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

Démonstration.

- Par formule de Koenig-Huygens : $\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ &= \sigma^2 + 0^2 \qquad \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2}$$

- On remarque :

$$\mathbb{E}(Y^2) \ = \ \mathbb{E}\big((\,|X|\,)^2\big) \ = \ \mathbb{E}(X^2) \ = \ \sigma^2$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y^2) = \sigma^2}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y) \ = \ \mathbb{E}(Y^2) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 \ = \ \sigma^2 - \left(\sigma\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2 \ = \ \sigma^2 - \sigma^2\ \frac{2}{\pi} \ = \ \sigma^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = \frac{\pi - 2}{\pi}\ \sigma^2}$$

- La v.a.r. S_n admet une variance en tant que combinaison de v.a.r. qui en admettent une, et :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\ \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Y_k) \qquad \textit{(car } Y_1, \ldots, Y_n \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi - 2}{\pi}\ \sigma^2 \qquad \textit{(d'après ce qui précède)} \\ &= \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \times \cancel{n}\, \frac{\pi - 2}{\pi}\ \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \frac{\pi - 2}{n\ \pi}\ \sigma^2}$$

□

c) Déterminer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de σ. En déduire que T_n est un estimateur convergent de σ.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une variance en tant que transformée linéaire de S_n qui en admet une. Elle admet donc un risque quadratique.
- Par décomposition biais-variance :

$$\begin{array}{rcll} r_\sigma(T_n) & = & \mathbb{V}(T_n) + \big(b_\sigma(T_n)\big)^2 & \\ & = & \mathbb{V}\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, S_n\right) + 0^2 & \textit{(car } T_n \textit{ est un estimateur sans biais de } \sigma\textit{)} \\ & = & \dfrac{\pi}{2}\, \mathbb{V}(S_n) & \\ & = & \dfrac{\cancel{\pi}}{2}\, \dfrac{\pi - 2}{n\, \cancel{\pi}}\, \sigma^2 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } r_\sigma(T_n) = \frac{\pi - 2}{2\, n}\, \sigma^2.}$$

- On remarque : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\pi - 2}{2\, n} = 0$. D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} r_\sigma(T_n) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } T_n \text{ est un estimateur convergente de } \sigma.}$$

$\square$

4. On rappelle qu'en **Scilab**, si i et j désignent deux entiers naturels non nuls, la commande `grand(i, j, 'nor', m, s)` simule dans un tableau à `i` lignes et `j` colonnes, `i` $\times$ `j` variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi normale d'espérance `m` et de variance `s`^{2}.
Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de simuler les variables aléatoires S_n et T_n pour des valeurs de n et σ entrées par l'utilisateur.

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
sigma = input('entrez la valeur de sigma : ')
X = ------ // simulations de X1, ..., Xn
Y = ------ // simulations de Y1, ..., Yn
S = ------
T = ------
```

Démonstration.
On propose le programme **Scilab** suivant :

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
sigma = input('entrez la valeur de sigma : ')
X = grand(1, n, 'nor', 0, sigma) // simulations de X1, ..., Xn
Y = abs(X) // simulations de Y1, ..., Yn
S = (1/n) * sum(Y)
T = sqrt(%pi / 2) * S
```

Détaillons l'obtention de ce script.

- **Début du programme**
  On commence par demander à l'utilisateur d'entrer une valeur pour l'entier `n` et pour l'écart-type `sigma`.

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
sigma = input('entrez la valeur de sigma : ')
```

- **Simulations des v.a.r.**
  × On commence par simuler un n-échantillon de la v.a.r. X où $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. D'après l'énoncé, cela s'effectue à l'aide de la commande suivante :

```
X = grand(1, n, 'nor', 0, sigma)
```

  × On simule ensuite un n échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de la v.a.r. $Y = |X|$.

```
Y = abs(X)
```

  × À l'aide de la simulation de $(Y_1, \ldots, Y_n)$, on en déduit une simulation de $S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

```
S = (1/n) * sum(Y)
```

Commentaire

Notons que l'on pouvait procéder de manières différentes. Par exemple :

- en exploitant les commances **Scilab** :

```
S = mean(Y)
```

- en codant la somme « à la main »

```
S = 0
for k = 1:n
    S = S + Y(k)
end
S = (1/n) * S
```

Étant donné l'espace alloué par le programme (une ligne), le concepteur avait certainement en tête la première ou la deuxième solution. Cependant, il est raisonnable de penser que toute réponse juste sera comptée comme telle. Ainsi, la dernière solution rapporte certainement la totalité des points.

  × On simule enfin la v.a.r. $T_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, S_n$.

```
T = srqt(%pi / 2) * S
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procédera de même dans les autres questions **Scilab**.

□

Problème (EML 2015)

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstration.
Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

$$\boxed{\text{Alors la fonction } f_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{est une densité de } X.}$$

$$\boxed{\text{La fonction de répartition de } X \text{ est la fonction } F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

$$\boxed{\text{Enfin, } X \text{ admet une variance, et donc une espérance, données par : } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.}$$ □

2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} x\, e^{-\lambda x}\, dx$$

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto e^{-\lambda x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.
- Soit $x \in [0, +\infty[$.
$$e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}\, \lambda\, e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}\, f_X(x)$$
- Or, comme f_X est une densité, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx$ est convergente.
Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_X(x)\, dx$ est convergente, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx$ aussi.
(on ne change pas la nature d'une intégrale en multipliant son intégrande par une constante non nulle)
- On en déduit :
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f_X(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx && \textit{(car } f_X \textit{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[\textit{)} \\ &= \frac{1}{\lambda} \times 1 && \textit{(car } f_X \textit{ est une densité)} \end{aligned}$$
$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}}$$

Commentaire

Même si cela était moins dans l'esprit de l'énoncé, il était possible de procéder par calcul direct :
- Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^B e^{-\lambda x}\, dx = \left[-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda x} \right]_0^B = -\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda B} - 1\right)$$

- Or, comme $\lambda \geqslant 0$: $\lim\limits_{B \to +\infty} e^{-\lambda B} = 0$.

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx$ est convergente et : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$.

- La fonction $x \mapsto x\, e^{-\lambda x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{-\lambda x}\, dx$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.
- Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$x\, e^{-\lambda x} = x\, \frac{1}{\lambda}\, \lambda\, e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}\, x\, f_X(x)$$

- Or, comme X admet une espérance, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$ est convergente.

  Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$ est convergente, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx$ aussi.

  (on ne change pas la nature d'une intégrale en multipliant son intégrande par une constante non nulle)
- On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x\, e^{-\lambda x}\, dx &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx \quad \text{(car } f_X \text{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[\text{)} \\ &= \frac{1}{\lambda} \times \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \int_0^{+\infty} x\, e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda^2}}$$

Commentaire

On pouvait là encore procéder par calcul direct à l'aide d'une intégration par parties.
- Soit $B \in [0, +\infty[$. On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & & u'(t) & = & 1 \\ v'(x) & = & e^{-\lambda x} & & v(x) & = & -\dfrac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda x} \end{array} \right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, B]$.

Commentaire

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^B x\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\,dx &= \left[x \times \left(-\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\right) \right]_0^B - \int_0^B -\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\,dx \\
&= -\frac{1}{\lambda}\,B\,\mathrm{e}^{-\lambda\,B} + \frac{1}{\lambda}\int_0^B \mathrm{e}^{-\lambda\,x}\,dx \\
&= -\frac{1}{\lambda}\,B\,\mathrm{e}^{-\lambda\,B} + \frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x} \right]_0^B \\
&= -\frac{1}{\lambda}\,B\,\mathrm{e}^{-\lambda\,B} - \frac{1}{\lambda^2}\big(\mathrm{e}^{-\lambda\,B} - 1\big)
\end{aligned}$$

- Or, comme $\lambda \geqslant 0$: $\lim\limits_{B\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\,B} = 0$. De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{B\to+\infty} B\,\mathrm{e}^{-\lambda\,B} = 0$.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\,dx$ est convergente et : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\,dx = \frac{1}{\lambda^2}$. □

3. a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\frac{1}{\lambda}\,\ln(1-U)$?

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}\,\ln(1-x)$, de sorte que $V = h(U)$.
  Comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$, on considère : $U(\Omega) = [0,1[$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \big(h(U)\big)(\Omega) = h\big(U(\Omega)\big) = h\big([0,1[\big) \\
&= \Big[h(0), \lim_{x\to 1} h(x)\Big[\quad \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [0,1[\textit{)} \\
&= [0,+\infty[
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } V(\Omega) = [0,+\infty[.}$$

Commentaire

Comme ce n'est pas le coeur de la question, il n'est pas nécessaire de faire l'étude détaillée de la fonction h. On présente ici rapidement les éléments permettant cette étude :

× la fonction h est dérivable (donc en particulier continue) sur $[0,1[$ en tant que composée de fonctions dérivables sur les intervalles adéquats.

× soit $x \in\,]0,1[$.

$$h'(x) = -\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{\lambda(1-x)} > 0$$

La fonction h est donc strictement croissante sur $[0,1[$.

- Déterminons la fonction de répartition de W.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  × Si $x < 0$, alors $[V \leqslant x] = \varnothing$ car $V(\Omega) = [0,+\infty[$. Ainsi :

$$F_V(x) = \mathbb{P}\big([V \leqslant x]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× Si $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}([V \leqslant x]) = \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}([\ln(1-U) \geqslant -\lambda x]) && \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[1-U \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) && \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) \\ &= F_U\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) \\ &= 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} && \textit{(car } 1-e^{-\lambda x} \in [0,1[\textit{ et } U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_V : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}.}$$

- On reconnaît la fonction de répartition associée à la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
  Or, la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r.

$$\boxed{\text{On en conclut : } V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).}$$

Commentaire

- On a démontré, lors de l'étude de $V(\Omega)$, que h réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[0,+\infty[$. Il est possible de déterminer l'expression de $h^{-1} : [0,+\infty[\to [0,1[$.
  Pour ce faire, on remarque que pour tout $x \in [0,1[$ et $y \in [0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} y = h(x) &\Leftrightarrow y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x) \\ &\Leftrightarrow x = 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, y} \\ &\Leftrightarrow x = h^{-1}(y) \end{aligned}$$

  On démontre ainsi que h^{-1} a pour expression : $h^{-1} : x \mapsto 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}$.
- On retrouve ici l'expression de la quantité $1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}$ apparaissant à la fin de la résolution de la question. Ce n'est pas surprenant car la méthode utilisée ici consiste justement à faire apparaître, étape par étape, la quantité $h^{-1}(x)$. Plus précisément, on a :

$$F_V(x) = \mathbb{P}\big([V \leqslant x]\big) = \mathbb{P}\big([h(U) \leqslant x]\big) = \mathbb{P}\big(\left[U \leqslant h^{-1}(x)\right]\big) = F_U\big(h^{-1}(x)\big)$$

  On comprend mieux pourquoi cette manière de procéder est appelée **méthode d'inversion**. □

b) Écrire une fonction en **Scilab** qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstration.

```
function v = simuExp(lambda)
    u = rand()
    v = -(1/lambda) * log(1-u)
endfunction
```

□

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, ..., X_n)$ qui, à tout ω de Ω, associe le plus grand des réels $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n \leqslant x])$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ & = & \big(\mathbb{P}([X_1 \leqslant x])\big)^n & \\ & = & \big(1-\mathrm{e}^{-x}\big)^n & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } x \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = (1-\mathrm{e}^{-x})^n}$$

□

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f_n.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i(\Omega) = [0,+\infty[$ (car $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$).

$$\boxed{\text{Ainsi : } T_n(\Omega) \subset [0,+\infty[.}$$

- Déterminons F_{T_n}, la fonction de répartition de T_n.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in]-\infty, 0[$, alors $[T_n \leqslant x] = \varnothing$ car $T_n(\Omega) \subset [0,+\infty[$. Ainsi :

$$F_{T_n}(x) \ = \ \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  × si $x \in [0,+\infty[$. D'après la question ***4.a)*** :

$$F_{T_n}(x) \ = \ \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) \ = \ \big(1-\mathrm{e}^{-x}\big)^n$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{T_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-\mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

- Démontrons que T_n est une v.a.r. à densité.
  - $\times$ La fonction F_{T_n} est continue :
    - sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
    - sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $F_{T_n} = g_2 \circ g_1$ de :
      - $g_1 : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ qui est :
        - ▶ continue sur $]0, +\infty[$,
        - ▶ telle que : $g_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
      - $g_2 : y \mapsto y^n$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.
    - en 0. En effet :
      - d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_{T_n}(x) = 0$
      - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_{T_n}(x) = F_{T_n}(0) = (1 - \mathrm{e}^{-0})^n = 0$.

    Ainsi :
$$\lim_{x \to 0^-} F_{T_n}(x) = F_{T_n}(0) = \lim_{x \to 0^+} F_{T_n}(x)$$
$$\boxed{\text{La fonction } F_{T_n} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$
  - $\times$ La fonction F_{T_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.
$$\boxed{\text{On en déduit que } F_{T_n} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$
$$\boxed{\text{La v.a.r. } T_n \text{ est donc une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déteminer une densité f_{T_n} de T_n, on dérive sa fonction de répartition F_{T_n} sur les intervalles **ouverts** $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - $\times$ Si $x \in]-\infty, 0[$, alors :
$$f_{T_n}(x) = F_n'(x) = 0 = f_n(x)$$
  - $\times$ Si $x \in]0, +\infty[$, alors :
$$f_{T_n}(x) = F_n'(x) = n\,\mathrm{e}^{-x}(1 - \mathrm{e}^{-x})^{n-1} = f_n(x)$$
  - $\times$ On choisit enfin : $f_{T_n}(0) = f_n(0)$.

  Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{T_n}(x) = f_n(x)$.
$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f_n \text{ est bien une densité de } T_n.}$$
□

5. a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. T_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_n(x)\, dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^m\, f_n(x)\, dx$.

- Tout d'abord, comme la fonction f_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_n(x)\ dx \ = \ \int_0^{+\infty} x\, f_n(x)\ dx$$

- De plus, la fonction $x \mapsto x\, f_n(x)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, f_n(x)\, dx$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.
- On sait de plus :

  × $x\, f_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. En effet, pour tout $x > 0$:

  $$\frac{x\, f_n(x)}{\frac{1}{x^2}} \ = \ x^2\, x\, n\, \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} \ = \ n\, x^3\, \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}$$

  Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} = 1$.

  De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\mathrm{e}^{-x} = 0$.

  Finalement, on a bien : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\, f_n(x)}{\frac{1}{x^2}} = 0$.

  × $\forall x \in [1, +\infty[$, $x\, f_n(x) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$

  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 $(2 > 1)$. Elle est donc convergente.

  D'après le critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\, f_n(x)\ dx$ est convergente.
- De plus, la fonction $x \mapsto x\, f_n(x)$ est continue par morceaux sur le **segment** $[0, 1]$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} x\, f_n(x)\ dx$ est donc bien définie.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, f_n(x)\ dx$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ la v.a.r. } T_n \text{ admet une espérance.}}$$

□

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(T_1)$ de T_1 et l'espérance $\mathbb{E}(T_2)$ de T_2.

Démonstration.

- On remarque que : $T_1 = \max(X_1) = X_1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la question } \textbf{\textit{1.}} : \mathbb{E}(T_1) = 1.}$$

- D'après la question précédente, T_2 admet une espérance. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_2(x)\ dx \;=\; \int_{0}^{+\infty} x\, f_2(x)\ dx \quad \textit{(car } f_2 \textit{ est nulle en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\
&= \int_0^{+\infty} 2x\,\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})\ dx \\
&= 2\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\ dx - 2\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x}\ dx \quad \textit{(par linéarité de l'intégration, car d'après } \textbf{2.}, \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ dx \textit{ et } \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\ dx \textit{ convergent)} \\
&= 2\times\frac{1}{1^2} - 2\times\frac{1}{2^2} \quad \textit{(d'après le résultat de la question } \textbf{2.}\textit{)} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_2) = \frac{3}{2}}$$

□

6. a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
Soit $x \in\ ]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
f'_n(x) &= -n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} + n(n-1)\mathrm{e}^{-2x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-2} \\
&= n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-2}(-(1-\mathrm{e}^{-x}) + (n-1)\mathrm{e}^{-x}) \\
&= n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-2}(n\mathrm{e}^{-x}-1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ f'_{n+1}(x) = (n+1)\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}((n+1)\mathrm{e}^{-x}-1)}$$

- Soit $x \in\ ]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) - f_n(x) &= (n+1)\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n} - n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} \\
&= \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}((n+1)(1-\mathrm{e}^{-x}) - n) \\
&= \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}(1-(n+1)\mathrm{e}^{-x}) \\
&= -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0 :\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)}$$

Commentaire

On a ici démontré l'égalité demandée sur $\mathbb{R}_+^*$ et non sur $\mathbb{R}_+$. En effet, la fonction f_n n'est pas toujours dérivable en 0. Par exemple, f_1 et f_2 ne le sont pas.

□

b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \int_0^{+\infty} x\,(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $x \mapsto x\big(f_{n+1}(x) - f_n(x)\big)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.
- Soit $A \in [0, +\infty[$. D'après la question précédente :

$$\int_0^A x(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx = -\frac{1}{n+1}\int_0^A x\, f'_{n+1}(x)\ dx$$

  On effectue alors une intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & f'_{n+1}(x) & & v(x) & = & f_{n+1}(x) \end{array}\right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n+1}\int_0^A x\, f'_{n+1}(x)\ dx &= -\frac{1}{n+1}\left(\Big[\, x\, f_{n+1}(x)\,\Big]_0^A - \int_0^A f_{n+1}(x)\ dx\right) \\ &= -\frac{1}{n+1}\, A\, f_{n+1}(A) + \frac{1}{n+1}\int_0^A f_{n+1}(x)\ dx \end{aligned}$$

- De plus :
  - × la fonction f_{n+1} est une densité de probabilité. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx$ est convergente (et vaut 1), et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx$ aussi.

    D'où : $\displaystyle\int_0^A f_{n+1}(x)\ dx \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx$.
  - × comme $A \geqslant 0$:

    $A\, f_{n+1}(A) = A \times n\mathrm{e}^{-A}(1 - \mathrm{e}^{-A})^n = n \times \dfrac{A}{\mathrm{e}^A} \times (1 - \mathrm{e}^{-A})^n \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ *(par croissances comparées)*

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx$ converge.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \int_0^{+\infty} x\,(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx.}$$

□

c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $\mathbb{E}(T_{n+1})$ et $\mathbb{E}(T_n)$, puis une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ sous forme d'une somme.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***3.a)***, les v.a.r. T_{n+1} et T_n admettent une espérance.

  On en conclut que les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{n+1}(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_n(x)\ dx$ sont (absolument) convergentes.

- On calcule alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(T_{n+1}) - \mathbb{E}(T_n) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{n+1}(x)\ dx - \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_n(x)\ dx & \\
& = & \displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\, f_{n+1}(x)\ dx - \int_{0}^{+\infty} x\, f_n(x)\ dx & \textit{(car } f_n \textit{ et } f_{n+1} \textit{ sont nulles} \\
& & & \textit{en dehors de } [0, +\infty[\textit{)} \\
& = & \displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\, (f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx & \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n+1} \int_{0}^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx & \textit{(d'après la question } \textbf{6.b)}\textit{)} \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx & \textit{(car } f_{n+1} \textit{ est nulle} \\
& & & \textit{en dehors de } [0, +\infty[\textit{)} \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n+1} \times 1 & \textit{(car } f_{n+1} \textit{ est une densité)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(T_{n+1}) - \mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{n+1}}$$

- On a donc : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(T_{k+1}) - \mathbb{E}(T_k) = \dfrac{1}{k+1}$.

  En sommant ces égalités pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\mathbb{E}(T_{k+1}) - \mathbb{E}(T_k)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

  Par télescopage :

$$\mathbb{E}(T_n) - \mathbb{E}(T_1) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

  Or, d'après la question , $\mathbb{E}(T_1) = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(T_n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

□

Partie III : Loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.
On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements : $[N = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = 0])$.

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$.
  $\omega \in [N = 0]$ si et seulement si $N(\omega) = 0$. Or $N(\omega) = 0$ si et seulement s'il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n(\omega) > a$.
  Autrement dit, si la proposition suivante est vérifiée :

$$\texttt{NON}\,(\exists n \in \mathbb{N}^*,\ X_n(\omega) > a)$$

  Ce qui équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\omega) \leqslant a$. Puis à : $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [X_n \leqslant a]$.

$$\boxed{[N = 0] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]}$$

Commentaire

- On aurait sans doute obtenu tous les points de cette question sans l'introduction propre de ω. En effet, l'énoncé prend le parti de ne pas le faire lors de la définition de la v.a.r. N.
- Cela se fait cependant au prix d'une confusion d'objets entre variables aléatoires / réalisations / événements. Détaillons la démonstration qui semble plus proche de l'esprit du concepteur.
- On a $N = 0$ si et seulement s'il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$.
  Autrement dit, si : $\texttt{NON}(\exists n \in \mathbb{N}^*,\ X_n > a)$.
  Ce qui équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \leqslant a$.
  Finalement, on a : $[N = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]$

- Ainsi :
$$\mathbb{P}([N = 0]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]\right)$$
D'après le théorème de la limite monotone :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant a]\right)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant a]\right) &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_k \leqslant a]) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \cdots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 \leqslant a]) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \cdots, X_n \textit{ ont même loi)} \\
&= (\mathbb{P}([X_1 \leqslant a]))^n \ = \ (F_{X_1}(a))^n \\
&= (1 - \mathrm{e}^{-a})^n && \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } a \geqslant 0\textit{)}
\end{aligned}$$
Or : $0 < 1 - \mathrm{e}^{-a} < 1$. En effet :
$$\begin{array}{lccccl}
 & & & a & > & 0 \\
\text{donc} & & & -a & < & 0 \\
\text{d'où} & 0 & < & \mathrm{e}^{-a} & < & 1 \quad \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
\text{ainsi} & -1 & < & -\mathrm{e}^{-a} & < & 0
\end{array}$$
On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - \mathrm{e}^{-a})^n = 0$.

Et : $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]\right) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([N = 0]) = 0.}$$
□

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([N = n]) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}\, \mathrm{e}^{-a}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition, l'événement $[N = n]$ est réalisé si et seulement si n est le plus petit entier tel que $[X_n > a]$ est réalisé. Autrement dit, si on a à la fois :
  - × pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, l'événement $[X_k \leqslant a]$ est réalisé,
  - × l'événement $[X_n > a]$ est réalisé.

$$\boxed{\text{Ainsi : } [N = n] = [X_1 \leqslant a] \cap \cdots \cap [X_{n-1} \leqslant a] \cap [X_n > a] = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k \leqslant a]\right) \cap [X_n > a]}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([N = n]) & = & \mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [X_k \leqslant a]\right) \cap [X_n > a]\right) & \\
& = & \left(\prod\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k \leqslant a])\right) \times \mathbb{P}([X_n > a]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \cdots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & (\mathbb{P}([X_1 \leqslant a]))^n \times \mathbb{P}([X_1 > a]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \cdots, X_n \textit{ ont même loi)} \\
& = & (F_{X_1}(a))^{n-1} \times (1 - F_{X_1}(a)) & \\
& = & (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1} \times \mathrm{e}^{-a} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } a \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([N = n]) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}\ \mathrm{e}^{-a}}$$

□

9. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(N)$ et la variance $\mathbb{V}(N)$ de N.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $N(\Omega) = \mathbb{N}$.
- De plus, on a démontré :
  - × $\mathbb{P}([N = 0]) = 0$.
  - × $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([N = n]) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}\ \mathrm{e}^{-a}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } N \hookrightarrow \mathcal{G}(\mathrm{e}^{-a}).}$$

- Ainsi N admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(N) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-a}} = \mathrm{e}^{a} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-a}}{(\mathrm{e}^{-a})^2} = \mathrm{e}^{2a}(1 - \mathrm{e}^{-a}) = \mathrm{e}^{a}\,(\mathrm{e}^{a} - 1).}$$

Commentaire

- Profitons de cette question pour faire un point sur la notation $X(\Omega)$.
Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :
$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{array}$$
Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît.
- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \ \subseteq \ ]-\infty, +\infty[$.
En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire.
- Dans le cas des v.a.r. **discrètes**, il est d'usage relativement courant de confondre :
  × l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),
  × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\big([X = x]\big) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\mathrm{Supp}(X)$.
- Si X est une v.a.r. **discrète**, il est à noter que toute valeur prise par X avec probabilité non nulle est une valeur prise par X. Autrement dit, on a toujours :
$$\boxed{\mathrm{Supp}(X) \subseteq X(\Omega)}$$
En effet, si $x \in \mathrm{Supp}(X)$ alors $\mathbb{P}\big([X = x]\big) \neq 0$. On en déduit : $[X = x] \neq \varnothing$. Il existe donc (au moins) un élément $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = x$. La v.a.r. X prend donc la valeur x.
- La réciproque n'est pas forcément vérifiée : $X(\Omega) \cancel{\subseteq} \mathrm{Supp}(X)$.
Autrement dit, une v.a.r. X peut prendre une valeur avec probabilité nulle. On peut par exemple penser à l'expérience consistant au lancer d'un dé à 6 faces. La v.a.r. X qui donne le résultat du dé a pour ensemble image $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$. Si on considère que le dé est truqué et ne renvoie que 6, alors le support de X est $\mathrm{Supp}(X) = \{6\}$.
- Ainsi, dans le cours, il est précisé qu'une v.a.r. X qui suit une loi géométrique (de paramètre e^{-a}) vérifie $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Ici, $N(\Omega) = \mathbb{N}$ mais la v.a.r. N prend la valeur 0 avec probabilité nulle. On a alors :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([N = x])$$
(et ces probabilités sont nulles si $x \notin \mathbb{N}^*$)
Dans ce cas, on considère que X et N ont même loi (qui est $\mathcal{G}\left(\mathrm{e}^{-a}\right)$).
- Évidemment, il est tout à fait possible d'effectuer un calcul direct avec les probabilités calculées en questions ***7.*** et ***8.***. Cependant, cela démontre une manque de prise de recul et finit par coûter des points car demande beaucoup plus de temps.

$\square$

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z, définie pour tout ω de Ω par :
$$Z(\omega) = \left\{ \begin{array}{cl} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{array} \right.$$

10. Justifier : $\mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0$.

Démonstration.

- La famille $([N=0], [N \neq 0])$ forme un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :
  $$\mathbb{P}([Z \leqslant a]) \ = \ \mathbb{P}([Z \leqslant a] \cap [N=0]) + \mathbb{P}([Z \leqslant a] \cap [N \neq 0])$$
- Or, par définition de Z :
  $$[Z \leqslant a] \cap [N=0] \ = \ [0 \leqslant a] \cap [N=0] \ = \ \Omega \cap [N=0] \ = \ \Omega \cap [N=0] \ = \ [N=0]$$
  (on rappelle que d'après l'énoncé : $a > 0 \geqslant 0$)
- D'autre part, par définition de N :
  $$[Z \leqslant a] \cap [N \neq 0] \ = \ \varnothing$$
  Démontrons-le en raisonnant par l'absurde.
  Supposons : $[Z \leqslant a] \cap [N \neq 0] \ \neq \ \varnothing$. Alors il existe $\omega \in [Z \leqslant a] \cap [N \neq 0]$.
  Cela signifie : $N(\omega) \neq 0$ et $Z(\omega) \leqslant a$.
  Comme $N(\omega) \neq 0$ alors $Z(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$. On en déduit :
  $$Z(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega) \leqslant a$$
  Or, comme $N(\omega) \neq 0$, alors $N(\omega)$ est par définition le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n(\omega) > a$.
  On a alors : $X_{N(\omega)}(\omega) > a$.
  Absurde ! (car $X_{N(\omega)}(\omega) \leqslant a$)
- On revient à la première égalité :
  $$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z \leqslant a]) & = & \mathbb{P}([N=0]) + \mathbb{P}(\varnothing) & \\ & = & 0 + 0 & \textit{(d'après la question \textbf{7.})} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0}$$

Commentaire

L'utilisation de la formule des probabilités totales devrait relever ici de l'automatisme. En effet, on traite d'une v.a.r. qui est définie par cas. Pour le calcul de $\mathbb{P}([Z \leqslant a])$, on est donc naturellement amené à vouloir traiter à part le cas où $[N=0]$ est réalisé et celui où $[N \neq 0]$ est réalisé. La formule des probabilités totales n'est autre qu'une formalisation correcte de cette idée.

□

11. Soit $x \in \,]a, +\infty[$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité d'événements :
$$[N=n] \cap [Z \leqslant x] = \begin{cases} [a < X_1 \leqslant x] & \text{si } n = 1 \\ [T_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x] & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N=n] \cap [Z \leqslant x])$.

Démonstration.
Deux cas se présentent.

- Si $n = 1$.

$$\begin{aligned} [N=1] \cap [Z \leqslant x] &= [N=1] \cap [X_N \leqslant x] && \textit{(par définition de } Z\textit{)} \\ &= [N=1] \cap [X_1 \leqslant x] && \textit{(par définition de } Z\textit{)} \\ &= [X_1 > a] \cap [X_1 \leqslant x] && \textit{(par définition de } N\textit{)} \\ &= [a < X_1 \leqslant x] \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } [N=1] \cap [Z \leqslant x] = [a < X_1 \leqslant x].}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([N=1] \cap [Z \leqslant x]) &= \mathbb{P}([a < X_1 \leqslant x]) = F_{X_1}(x) - F_{X_1}(a) \\ &= (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-x}) - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-a}) = \mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-x} \\ &= \mathrm{e}^{-a}\ (1 - \mathrm{e}^{a-x}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([N=1] \cap [Z \leqslant x]) = \mathrm{e}^{-a}\ (1 - \mathrm{e}^{a-x})}$$

- Si $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} [N=n] \cap [Z \leqslant x] &= [N=n] \cap [X_N \leqslant x] && \textit{(par définition de } Z\textit{)} \\ &= [N=n] \cap [X_n \leqslant x] && \textit{(par définition de } Z\textit{)} \\ &= \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k \leqslant a] \right) \cap [X_n > a]\ \cap\ [X_n \leqslant x] && \textit{(d'après la question \textbf{8.})} \\ &= \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k \leqslant a] \right) \cap [a < X_n \leqslant x] \\ &= [\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x] \\ &= [T_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x] && \textit{(par définition de } T_{n-1}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } n \geqslant 2, \text{ on a bien : } [N=n] \cap [Z \leqslant x] = [T_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x].}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([N=n] \cap [T \leqslant x]) &= \mathbb{P}([T_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([T_{n-1} \leqslant a])\, \mathbb{P}([a < X_n \leqslant x]) && \textit{(car } T_{n-1} \textit{ et } X_n \textit{ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions)} \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}\ \mathbb{P}([a < X_n \leqslant x]) && \textit{(d'après la question \textbf{4.a)})} \end{aligned}$$

De plus X_n suit la même loi que X_1, donc :

$$\mathbb{P}([a < X_n \leqslant x]) = \mathbb{P}([a < X_1 \leqslant x]) = \mathrm{e}^{-a}(1 - \mathrm{e}^{a-x})$$

$$\boxed{\text{Si } n \geqslant 2,\ \mathbb{P}([N=n] \cap [Z \leqslant x]) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}\, \mathrm{e}^{-a}(1 - \mathrm{e}^{a-x}).}$$

On remarque que l'expression trouvée dans le cas $n \geqslant 2$ est valide pour $n = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([N=n] \cap [Z \leqslant x]) = \mathrm{e}^{-a}(1 - \mathrm{e}^{a-x})\,(1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}}$$

Commentaire

On fait remarquer que la formule obtenue est valide dans le cas $n = 1$ et $n \geqslant 2$.
Ce n'est pas un objectif annoncé de la question. L'avantage est que cela rend la question suivante plus simple à rédiger : on n'est pas obligé de distinguer les cas $n = 1$ et $n \geqslant 2$ puisque l'expression est valide dans ces deux cas.

□

b) Montrer alors : $\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1 - \mathrm{e}^{a-x}$.

Démonstration.
La famille $\big([N = n]\big)_{n \geqslant 1}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z \leqslant x]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [Z \leqslant x]) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a}(1 - \mathrm{e}^{a-x})\,(1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{11.a)}}\textit{)} \\
&= \mathrm{e}^{-a}(1 - \mathrm{e}^{a-x}) \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1} \\
&= \mathrm{e}^{-a}(1 - \mathrm{e}^{a-x}) \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \mathrm{e}^{-a}(1 - \mathrm{e}^{a-x}) \, \frac{1}{\cancel{1} - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-a})} \\
&= \cancel{\mathrm{e}^{-a}}(1 - \mathrm{e}^{a-x}) \, \frac{1}{\cancel{\mathrm{e}^{-a}}} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{a-x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1 - \mathrm{e}^{a-x}}$$

□

12. a) Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x < 0$, alors :
  $$[Z - a \leqslant x] = [Z \leqslant x + a] \subset [Z \leqslant a]$$
  Donc, par croissance de $\mathbb{P}$ et d'après la question ***10.*** :
  $$0 \leqslant \mathbb{P}([Z - a \leqslant x]) \leqslant \mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0$$
  D'où : $F_{Z-a}(x) = \mathbb{P}([Z - a \leqslant x]) = 0$.
  - × si $x \geqslant 0$:
  $$\begin{aligned}
  F_{Z-a}(x) &= \mathbb{P}([Z - a \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([Z \leqslant x + a]) \\
  &= 1 - \mathrm{e}^{\cancel{a}-(x+\cancel{a})} && \begin{array}{l}\textit{(d'après la question } \textbf{\textit{11.b)}}\textit{,} \\ \textit{car } x + a \geqslant a\textit{)}\end{array} \\
  &= 1 - \mathrm{e}^{-x}
  \end{aligned}$$

Finalement :

$$F_{Z-a} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(1)$.
Or, la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. .

$$\boxed{\text{Donc la v.a.r. } Z - a \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } 1.}$$

Commentaire

- On reconnaît ici une question du type « déterminer la loi d'une transformée affine d'une v.a.r. Z ». Ce type de question est à savoir faire sans hésitation.
- L'énoncé nous guide ici dans la disjonction de cas à considérer : il précise que $Z - a$ suit une loi exponentielle. Or l'ensemble image d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle est $[0, +\infty[$. La disjonction de cas attendue pour déterminer la fonction de répartition de $Z - a$ est donc :
  - × le cas $x \geqslant 0$,
  - × le cas $x < 0$.

□

b) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(Z)$.

Démonstration.

- On remarque que : $Z = (Z - a) + a$.

  La v.a.r. Z admet une variance, donc une espérance, en tant que somme de v.a.r. qui en admettent.

- Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Z) \ = \ \mathbb{E}(Z - a) + \mathbb{E}(a) \ = \ \frac{1}{1} + a \ = \ 1 + a$$

- Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(Z) \ = \ \mathbb{V}(Z - a) \ = \ \frac{1}{1^2} \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}(Z) = 1 + a \text{ et } \mathbb{V}(Z) = 1.}$$

□