DS7 (version A)

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice unité et O la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. ***a)*** Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\,(u)$.

b) La matrice A est-elle inversible ?

2. ***a)*** Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et tel que $f(v) = u$.

b) Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$,dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0, 1, -1)$.

c) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathscr{B}'$. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

3. ***a)*** Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathscr{B}'$. En déduire la seule valeur propre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b) Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1}, puis en déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a : $A^k = O$.

4. On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A),

a) Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = \text{Vect}\left(I, N, N^2\right)$.
On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Établir que : « $M \in C_A$ » $\Leftrightarrow$ « $P^{-1}MP \in C_N$ ».
En déduire que $C_A = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right)$. Quelle est la dimension de C_A ?

Exercice 2

Partie I : Étude d'une fonction d'une variable réelle

On considère l'application $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0,+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que f est convexe sur $]0,+\infty[$.

5. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O et préciser celle-ci.

b) Déterminer les points d'intersection de Γ et, de l'axe des abscisses.

c) Tracer l'allure de Γ. On admet : $0,36 \leqslant \mathrm{e}^{-1} < 0,37$.

Partie II : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ par :

$$F(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$.

7. Montrer que (e,e) est un point critique de F.

8. Calculer les dérivées partielles secondes de F en tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$.
Est-ce que F admet, un extremum local en (e,e) ?

Exercice 3

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$, où σ est strictement positif.
On rappelle que la fonction $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de X et on note F_X la fonction de répartition de X, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\, dt$$

1. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.

2. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

a) Montrer que la fonction de répartition de Y est la fonction, notée F_Y, définie par :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 2\,F_X(x) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y.

c) Montrer que Y possède une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Y) = \sigma\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

3. On suppose, dans cette question seulement, que σ est inconnu et on se propose de l'estimer.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ composé de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et ayant toutes la même loi que Y.
On note S_n la variable aléatoire définie par : $S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_i$.

a) Démontrer que S_n admet une espérance et la calculer.

b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X, puis déterminer $\mathbb{E}(Y^2)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

4. On rappelle qu'en **Scilab**, si i et j désignent deux entiers naturels non nuls, la commande `grand(i, j, 'nor', m, s)` simule dans un tableau à `i` lignes et `j` colonnes, `i` $\times$ `j` variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi normale d'espérance `m` et de variance `s`^{2}.
Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de simuler les variables aléatoires S_n et T_n pour des valeurs de n et σ entrées par l'utilisateur.

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
sigma = input('entrez la valeur de sigma : ')
X = ------ // simulations de X1, ..., Xn
Y = ------ // simulations de Y1, ..., Yn
S = ------
T = ------
```

Problème

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\ dx, \quad \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\ dx$$

3. ***a)*** soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$?

b) Écrire une fonction en **Scilab** qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, ..., X_n)$ qui, à tout ω de Ω, associe le plus grand des réels $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. ***a)*** Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n \leqslant x])$.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f_n.

5. ***a)*** Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(T_1)$ de T_1 et l'espérance $\mathbb{E}(T_2)$ de T_2.

6. ***a)*** Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$.

b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} x\,(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx$$

c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $\mathbb{E}(T_{n+1})$ et $\mathbb{E}(T_n)$, puis une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ sous forme d'une somme.

Partie III : Loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.
On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements : $[N = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = 0])$.

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([N = n]) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}\,\mathrm{e}^{-a}$.

9. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(N)$ et la variance $\mathbb{V}(N)$ de N.
On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z, définie pour tout ω de Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}$$

10. Justifier : $\mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0$.

11. Soit $x \in \,]a, +\infty[$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité d'événements :

$$[N = n] \cap [Z \leqslant x] = \begin{cases} [a < X_1 \leqslant x] & \text{si } n = 1 \\ [T_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x] & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = n] \cap [Z \leqslant x])$.

b) Montrer alors : $\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1 - \mathrm{e}^{a-x}$.

12. ***a)*** Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

b) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(Z)$.