DS6 (version B) /106

Exercice / 31

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit v un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, \dots, v_n$ dans la base $\mathscr{B}$ et qui vérifie $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe le vecteur $f(x)$ défini par : $f(x) = x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v$.

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

- **1 pt : caractère endo**
- **2 pts : caractère morphisme**

b) Montrer que $f \circ f = f$.

- **1 pt : linéarité de** f
- **1 pt :** $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$
- **1 pt : fin du calcul**

2. Déterminer le spectre de f.

- **1 pt :** $Q(X) = X(X-1)$ **polynôme annulateur donc** $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0, 1\}$
- **1 pt :** v **est vecteur propre donc** 0 **est valeur propre**
- **2 pts :** 1 **est valeur propre (dont 1 pt pour** $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$**)**

3. a) Montrer que le vecteur y appartient à l'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, si et seulement si $f(y) = y$.

- **1 pt :** $(y \in \mathrm{Im}(f)) \;\Rightarrow\; (f(y) = y)$
- **1 pt :** $(y \in \mathrm{Im}(f)) \;\Leftarrow\; (f(y) = y)$

b) Montrer que la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est inférieure ou égale à $n-1$.

- **1 pt : théorème du rang**
- **1 pt :** $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ **donc** $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant 1$

c) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $(e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$.

- **1 pt : caractérisation** $f(e_i - e_{i+1}) = e_i - e_{i+1}$ **question** ***3.a)***
- **2 pts :** $f(e_i - e_{i+1}) = e_i - e_{i+1}$ **(dont 1 pt pour** $\sum\limits_{k=1}^{n} e_j^k = 1$**)**

d) En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. Quel est le rang de f ?

- **1 pt :** $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)$ **est une famille de** $\mathrm{Im}(f)$
- **1 pt :** $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)$ **est une famille libre de** $\mathrm{Im}(f)$
- **1 pt :** $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant$ **cardinal famille libre**
- **1 pt :** $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant n-1$ **d'après la question** ***3.b)*** **et conclusion**

4. ***a)*** Déterminer une base du noyau de f.

- **1 pt : théorème du rang et** $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$
- **1 pt :** (v) **famille libre de** $\text{Ker}(f)$
- **1 pt :** (v) **base de** $\text{Ker}(f)$

b) Quels sont les sous-espaces propres de f ?

- **1 pt :** $E_0(f) = \text{Ker}(v)$
- **1 pt :** $E_1(f) = \text{Vect}\,(e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n)$

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

- **1 pt : somme des dimensions des espaces propres**

5. Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et la matrice M' de f dans une base de vecteurs propres.

- **1 pt : calcul de** $f(e_i)$
- **1 pt : matrice** M
- **1 pt :** $f(v)$
- **1 pt :** $f(e_i - e_{i+1})$
- **0 pt : matrice** M'

Problème /75

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$;
- on note n un entier supérieur ou égal à 2.

L'objet du problème est l'étude de sommes de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre, mais qui ne sont pas nécessairement indépendantes.
Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Partie I. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans divers schémas de Bernoulli

Dans cette partie, on considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$, c'est à dire :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}([X_k = 1]) = p \quad et \quad \mathbb{P}([X_k = 0]) = 1 - p$$

On suppose que pour tout couple $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $k \neq \ell$, le coefficient de corrélation linéaire des variables X_k et X_ℓ est le même ; on note r ce coefficient. On a donc :

$$\forall (k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2,\ \frac{\text{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_k)\mathbb{V}(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 & si\ k = \ell \\ r & si\ k \neq \ell \end{cases}$$

1. a) Dans les cas (i) et (ii) suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de la variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ en fonction de n et p.

(i) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

- **1 pt :** $r = 0$
- **1 pt :** $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) = n\, p\, (1-p)$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\,(n, p)$

(ii) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont toutes égales.

- **1 pt :** $r = 1$
- **1 pt :** $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) n^2\, p\, (1-p)$
- **1 pt :** $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ **et** $\mathbb{P}([S_n = 0]) = 1 - p$ **et** $\mathbb{P}([S_n = n]) = p$

De plus, préciser la loi de $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ dans chacun des deux cas précédents.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la variance de la variable aléatoire $\sum\limits_{i=1}^{k} X_i$ est donnée par la formule :

$$\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big) \;=\; k\, p\, (1-p)\, (1 + (k-1) r)$$

- **1 pt :** $\mathbb{V}\Big(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{V}(X_i) + \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i, j \leqslant k \\ i \neq j}} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big)$
- **1 pt :** $= k\ p(1-p) + \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i, j \leqslant k \\ i \neq j}} r\ \sqrt{p(1-p)\ p(1-p)}$
- **1 pt :** $\mathrm{Card}\left([\![1, k]\!]^2 \setminus \{(i, j) \in [\![1, k]\!]^2 \mid i = j\}\right) \;=\; k^2 - k \;=\; k\ (k-1)$

c) En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\dfrac{1}{n-1}$.

- **1 pt :** $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) \geqslant 0$
- **1 pt : avec la qst précédente** $r \geqslant -\dfrac{1}{n-1}$

2. On suppose dans cette question que n est au moins égal à 2.

a) Montrer que r est égal à -1 si et seulement si on a : $\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = p(2p - 1)$.

- **1 pt :** $r = \dfrac{\mathbb{E}(X_1\, X_2) - p^2}{p\, (1-p)}$
- **1 pt :** $X_1\, X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\,(u)$ **où** $u = \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$
- **1 pt :** $r = -1 \;\Leftrightarrow\; u = p\, (2p-1)$ **car** $\mathbb{E}(X_1\, X_2) = u$

b) Que vaut alors $\mathbb{P}\big(\,[X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\,\big)$?

- **1 pt : calcul de $\mathbb{P}([X = 0])$ par FPT sur le SCE** $([X_2 = 0]\,, [X_2 = 1])$
- **1 pt : calcul de $\mathbb{P}([X_2 = 1])$ par FPT sur le SCE** $([X_1 = 0]\,, [X_1 = 1])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = (1 - p)(1 - 2p)$

c) En déduire que le coefficient r ne peut-être égal à -1 que lorsque $p = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([X_1 + X_2 = 1]) = 1$.

- **1 pt :** $r = -1 \Leftrightarrow \mathbb{V}(X_1 + X_2) = 0$
- **1 pt :** $\Leftrightarrow X_1 + X_2$ **constante p.s. égale à** $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = 2p$
- **1 pt :** $2p \in (X_1 + X_2)(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ **ssi** $p = \dfrac{1}{2}$ **car** $p \in \,]0, 1[$

3. On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et que $\mathbb{P}\left(\left[\sum\limits_{k=1}^{n} X_k = 1\right]\right) = 1$.

a) Exprimer les valeurs de p et r en fonction de n.

- **1 pt :** $\mathbb{E}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) = 1$ **donc** $p = \dfrac{1}{n}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) = 0$ **donc** $r = -\dfrac{1}{n-1}$

b) Déterminer les n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ pour lesquels la probabilité $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right)$ est strictement positive et la calculer.

- **2 pts (1 pt pour toute explication qui tient la route) : les seuls n-uplets** $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ **pour lesquels la probabilité** $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right)$ **est strictement positive sont ceux qui ne contiennent que des coordonnées nulles mises à part l'une d'entre elles égale à** 1
- **2 pts : dans ce cas** $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right) = \dfrac{1}{n}$

Partie II. Lois bêtas-binomiales

4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ est convergente si seulement si $x > 0$.

- **1 pt :** $f : t \mapsto t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}$ **est continue sur** $]0, \frac{1}{2}]$
- **3 pts : critère d'équivalence**
  - × $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$
  - × $\forall t \in \,]0, \frac{1}{2}]$, $t^{x-1}\,(1-t)^{y-1} \geqslant 0$ **et** $\dfrac{1}{t^{1-x}} \geqslant 0$.
  - × **L'intégrale** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1-x}}\,dt$ **est une intégrale de Riemann impropre en** 0. **Elle est donc convergente si et seulement si** $1 - x < 1$ **c'est à dire** $x > 0$.

b) Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, établir à l'aide d'un changement de variable affine, l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt \;=\; \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{y-1}\,(1-t)^{x-1}\,dt$$

- **1 pt : changement de variable valide car $\psi : u \mapsto 1-u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\frac{1}{2}, 1-\varepsilon]$.**
- **1 pt : calcul**

c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

- **1 pt : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} u^{y-1}\,(1-u)^{x-1}\,du$ convergente $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ convergente**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ est convergente si et seulement si $y > 0$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ convergente $\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ et $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ convergentes**

Dans toute la suite du problème, on pose : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt.$

5. Soit x et y des réels strictement positifs.

a) À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation : $B(x+1,y) = \dfrac{x}{y} \times B(x,y+1)$.

- **1 pt : IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[c,d]$**
  0 pt si non placé sur un segment
- **1 pt : calcul**
- **1 pt : les intégrales en présences sont convergentes**

b) En déduire l'égalité : $B(x,y+1) = \dfrac{y}{x+y} \times B(x,y)$.

- **1 pt : $B(x,y+1) \;=\; \dfrac{y}{x+y}\,B(x,y) \Leftrightarrow B(x+1,y) + B(x,y+1) \;=\; B(x,y)$**
- **1 pt : vérification $B(x+1,y) + B(x,y+1) \;=\; B(x,y)$**

6. Pour tout réel z, soit $\big((z)^{[m]}\big)_{m\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$(z)^{[0]} = 1 \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N},\ (z)^{[m+1]} = (z+m) \times (z)^{[m]}$$

(par exemple, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $(1)^{[m]} = m!$)
Établir pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout couple (k,ℓ) d'entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant \ell$, la relation :

$$B(x+k, y+\ell-k) \;=\; \frac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$$

- **5 pts :**
  - × **3 pts : initialisation**
    - **1 pt : initialisation**
    - **2 pts : hérédité**
  - × **2 pts : hérédité**

7. Soit a et b des réels strictement positifs.

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose : $p_k = \binom{n}{k} \dfrac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$.

a) À l'aide de la relation obtenue dans la question ***6***, montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = \dfrac{1}{B(a,b)} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(a+k, b+n-k)$ **(question précédente avec** $x = a > 0$ **et** $y = b > 0$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{k}{n} B(a+k, b+n-k) = \displaystyle\int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1}\, dt = B(a,b)$ **(par formule du binôme)**

On dit qu'une variable aléatoire S suit une loi bêta-binomiale $\mathbf{B}(n; a, b)$ si $S(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et si :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}([S = k]) = \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$$

b) Reconnaître la loi $\mathbf{B}(n; 1, 1)$.

- **1 pt :** $S(\Omega) = [\![0, n]\!]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([S = k]) = \binom{n}{k} \dfrac{k! \times (n-k)!}{(n+1)!}$ **(par définition de l'opérateur** $.^{[n]}$**)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([S = k]) = \dfrac{1}{n+1}$

c) Montrer que l'espérance d'une variable aléatoire S qui suit la loi $\mathbf{B}(n; a, b)$ est égale à $\dfrac{na}{a+b}$.

- **1 pt :** S **admet une espérance car c'est une v.a.r. finie**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(S) = \dfrac{1}{B(a,b)} \sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} B(a+k, b+n-k)$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{k}{n} B(a+k, b+n-k) = n\ B(a+1, b)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(S) = \dfrac{1}{B(a,b)}\ n\ B(a+1, b) = \dfrac{n}{B(a,b)}\ \dfrac{a}{b}\ B(a, b+1)$ **(d'après la question *5.a)*)**

Partie III. Un possible dans le cas où $n = 2$

Soit a et b des réels strictement positifs et X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$ telles que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \{0,1\}^2,\ \mathbb{P}\left([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2]\right) = \frac{B(a + x_1 + x_2, b + 2 - x_1 - x_2)}{B(a,b)}$$

8. a) Montrer que les deux variables X_1 et X_2 suivent la même loi de Bernoulli.

- **1 pt : par FPT sur le SCE associé à** X_2**,** $\mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) = \dfrac{B(a, b+2)}{B(a,b)} + \dfrac{B(a+1, b+1)}{B(a,b)}$
- **1 pt :** $B(a, b+2) = \dfrac{b+1}{a+b+1}\ \dfrac{b}{a+b}\ B(a,b)$ **d'après *5.a)* et *5.b)***
- **1 pt :** $B(a+1, b+1) = \dfrac{b}{(a+1)+b}\ \dfrac{a}{a+b}\ B(a,b)$ **d'après *5.a)* et *5.b)***

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_1 = 0]) = \dfrac{b}{a+b}$
- **1 pt : comme** $X_1(\Omega) = \{0,1\}$**,** $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)$
- **1 pt : de même** $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)$

b) Montrer que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi bêta-binomiale $\mathbf{B}(2; a, b)$.

- **1 pt : par FPT sur le SCE associé à** X_1**,** $\mathbb{P}\big([X_1 + X_2 = i]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = i]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = i-1]\big)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_1 + X_2 = 0]\big) = \dbinom{2}{0} \dfrac{(a)^{[0]} \times b^{[2-0]}}{(a+b)^{[2]}}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_1 + X_2 = 1]\big) = \dbinom{2}{1} \dfrac{(a)^{[1]} \times b^{[1]}}{(a+b)^{[2]}}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_1 + X_2 = 2]\big) = \dfrac{(a+1)\ a}{(a+b+1)(a+b)}$

c) Établir la relation : $\mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) = \dfrac{a+1}{a+b+1}$.

- **1 pt**

9. La fonction **Scilab** suivante dont le script est incomplet (lignes 7 et 11), effectue une simulation des deux variables X_1 et X_2 qu'elle place dans un vecteur ligne à deux composantes.

```
1  function x = randbetabin(a, b)
2      x = zeros(1,2)
3      u = (a + b) * rand()
4      v = (a + b + 1) * rand()
5      if (u < a) then
6          x(1,1) = 1
7          if .............. then
8              x(1,2) = 1
9          end
10     else
11         if ............. then
12             x(1,2) = 1
13         end
14     end
15 endfunction
```

a) Préciser la loi simulée par la variable u de la ligne 3.

- **1 pt : u est une simulation d'une v.a.r.** U **de loi** $\mathcal{U}\big([0, a+b[\big)$

b) Compléter les lignes 7 et 11.

- **1 pt :**

```
7  if v < a + 1 then
```

- **1 pt :**

```
11  if v < a then
```

10. a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X_1 et X_2.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \dfrac{a}{a+b}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(X_2) = \dfrac{a}{a+b}\ \dfrac{b}{a+b}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_1\, X_2) = \dfrac{(a+1)\, a}{(a+b+1)\,(a+b)}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_1\, X_2) - \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{a\, b}{(a+b+1)\,(a+b)^2}$
- **1 pt :** $\rho(X_1, X_2) = \dfrac{1}{a+b+1}$

b) Soit (p, r) un couple de réels vérifiant $0 < p < 1$ et $0 < r < 1$.
Expliquer comment utiliser la fonction `randbetabin` pour simuler deux variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et dont le coefficient de corrélation linéaire est égal à r.

- **2 pts : Pour `p` et `r` donnés, l'appel `randbetabin(p*(1-r)/r, (1-p)*(1-r)/r)` permet d'obtenir la simulation de v.a.r. X_1 et X_2 qui vérifient les propriétés énoncées dans la question.**