DS6 (version A)

Exercice 1 (EDHEC 2018)

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier Pile et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier Face. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Face.

1. a) Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord : $[X = 1] = P_1$.
- La famille (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([X=1]\big) & = & \mathbb{P}(P_1) & \\ & = & \mathbb{P}(A_0 \cap P_1) + \cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap P_1)} + \mathbb{P}(A_2 \cap P_1) & \textit{(car } A_1 \cap P_1 = \varnothing \textit{ puisque la pièce 1 ne donne que Face)} \\ & = & \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}(P_1) + \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_2}(P_1) & \textit{(car pour tout } i \in [\![0,2]\!], \ \mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{3} \neq 0\textit{)} \\ & = & \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 \ = \ \frac{1}{2} & \textit{(par définition des pièces 0 et 2)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X=1]\big) = \frac{1}{2}}$$

Commentaire

Cette question est une illustration du cadre classique de la formule des probabilités totales : l'expérience aléatoire débute par un choix et ce choix influence le reste de l'expérience aléatoire. On considère ici l'événement P_1, réalisé si Pile est obtenu dès le premier lancer. Il est important de comprendre que la probabilité de cet événement dépend du choix initial de la pièce utilisée pour faire les lancers. L'idée derrière la formule des probabilités totales est de déterminer la probabilité de l'événement P_1 pour tous les choix possibles de pièce.
Ce qui se formalise comme suit :

- × les choix de la pièce sont représentés par la famille d'événements (A_0, A_1, A_2).
  Cette famille est un système complet d'événements car deux pièces ne peuvent être choisies à la fois (si $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$) et car l'une des pièces est forcément choisie ($A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \Omega$).
- × on détermine, pour tout $i \in [\![0, 2]\!]$, $\mathbb{P}\big(A_i \cap P_1\big)$.

□

b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2$, $\mathbb{P}([X = n]) = \dfrac{1}{3} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- On raisonne comme dans la question précédente.
  On remarque tout d'abord que l'événement $[X = n]$ est réalisé si et seulement si le premier Pile apparaît au rang n. Autrement dit, si et seulement si l'on a obtenu $n-1$ Face suivi d'un Pile. Ainsi :
  $$[X = n] \ = \ F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n$$
- Par la formule des probabilités totales :
  $$\mathbb{P}\big(\,[X = n]\,\big) \ = \ \mathbb{P}\big(A_0 \cap [X = n]\,\big) + \cancel{\mathbb{P}\big(A_1 \cap [X = n]\,\big)} + \cancel{\mathbb{P}\big(A_2 \cap [X = n]\,\big)}$$
  En effet :
  × $A_1 \cap [X = n] = A_1 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n = \varnothing$ puisque la pièce 1 ne donne jamais Pile.
  × $A_2 \cap [X = n] = A_2 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n = \varnothing$ puisque la pièce 2 donne toujours Pile, notamment dès le premier lancer.
- On obtient ainsi :
  $$\begin{array}{cll} & \mathbb{P}\big(\,[X = n]\,\big) & \\ = & \mathbb{P}\big(A_0 \cap [X = n]\,\big) \ = \ \mathbb{P}\big(A_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n\big) & \\ = & \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}\big(A_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n\big) & \\ = & \mathbb{P}(A_0) \ \times \ \mathbb{P}_{A_0}(F_1) \ \times \ \ldots \ \times \ \mathbb{P}_{A_0}(F_{n-1}) \ \times \ \mathbb{P}_{A_0}(P_n) & \text{\textit{(car les événements sont indépendants pour } } \mathbb{P}_{A_0}\text{)} \\ = & \dfrac{1}{3} \ \times \ \dfrac{1}{2} \ \times \ \ldots \ \times \ \dfrac{1}{2} \ \times \ \dfrac{1}{2} \ = \ \dfrac{1}{3} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \text{\textit{(car la pièce 0 est équilibrée)}} \end{array}$$

$$\boxed{\text{En combinant tous ces résultats, on obtient : } \mathbb{P}\big(\,[X = n]\,\big) \ = \ \dfrac{1}{3} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n.}$$

Commentaire

Il y a une subtilité cachée dans cette question. On utilise le fait que les événements P_i (avec $i \in \mathbb{N}^*$) et F_j (avec $j \in \mathbb{N}^*$) sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}_{A_0}$. L'idée est qu'une fois la pièce choisie, les lancers sont indépendants. Cependant, ces événements `NE SONT PAS` indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$. Démontrons-le.

- Tout d'abord, par la formule des probabilités totales :
  $$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big(P_1 \cap P_2\big) & = & \mathbb{P}\big(A_0 \cap P_1 \cap P_2\big) + \cancel{\mathbb{P}\big(A_1 \cap P_1 \cap P_2\big)} + \mathbb{P}\big(A_2 \cap P_1 \cap P_2\big) \\ & = & \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}\big(P_1 \cap P_2\big) + \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_2}\big(P_1 \cap P_2\big) \\ & = & \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}(P_1)\ \mathbb{P}_{A_0}(P_2) + \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_2}(P_1)\ \mathbb{P}_{A_2}(P_2) \\ & = & \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \ + \ \dfrac{1}{3} \times 1 \times 1 \ = \ \dfrac{5}{12} \end{array}$$
- Or, comme vu en question ***1.a)*** : $\mathbb{P}(P_1) \ = \ \frac{1}{2}$ et en raisonnant de même : $\mathbb{P}(P_2) \ = \ \frac{1}{2}$.
  Et ainsi :
  $$\mathbb{P}\big(P_1 \cap P_2\big) = \dfrac{5}{12} \neq \dfrac{1}{4} = \mathbb{P}(P_1)\ \mathbb{P}(P_2)$$

□

c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X=0])$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, X prend soit la valeur 0, soit le rang d'apparition du premier Pile.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X(\Omega) = \{0\} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}}$$

- Ainsi, la famille $\big([X=n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\big) = 1$$

et ainsi en réordonnant :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X=0]\big) &= 1 - \mathbb{P}\big([X=1]\big) - \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\big) \\
&= 1 - \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n && \textit{(d'après les deux questions précédentes)} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}} && \textit{(avec } \tfrac{1}{2} \in\,]-1,1[\textit{)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{P}\big([X=0]\big) = \frac{1}{3}.}$$

Commentaire

- La propriété de la question précédente (***1.b)***) a été démontrée pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$. On ne peut donc l'utiliser que pour un entier $n \geqslant 2$. C'est une évidence qu'il convient toutefois de rappeler car elle est trop régulièrement ignorée par les candidats. Lorsque l'on souhaite utiliser un résultat précédemment démontré ou admis, il faut scrupuleusement vérifier que l'on est dans les conditions d'application de ce résultat.
- Il est indispensable de connaître les formules donnant la valeur d'une somme géométrique.
  - Dans le cas d'une somme finie.
    Pour tout $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant n$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}$$

  - Dans le cas d'une somme infinie.
    Pour tout $q \in\,]-1,1[$, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{+\infty} q^k = \frac{q^m}{1-q}$$

Commentaire

- Il est aussi possible de traiter cette question directement.
Rappelons tout d'abord que l'événement $[X = 0]$ est réalisé si l'on n'obtient jamais Pile. Ainsi :
$$[X = 0] \;=\; \bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i$$
D'après le théorème de la limite monotone :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i\right) \;=\; \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right)$$
Pour plus de lisibilité, notons $C_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$. Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (A_0, A_1, A_2) :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(C_n) & = & \mathbb{P}(A_0 \cap C_n) + \mathbb{P}(A_1 \cap C_n) + \cancel{\mathbb{P}(A_2 \cap C_n)} \\ & = & \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}(C_n) + \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}_{A_1}(C_n) \end{array}$$
En effet $A_2 \cap C_n = \varnothing$ puisque la pièce 2 donne toujours Pile, notamment dès le premier lancer. Enfin :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_{A_0}(C_n) & = & \mathbb{P}_{A_0}\big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i\big) \;=\; \mathbb{P}_{A_0}(F_1) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_0}(F_n) \;=\; \dfrac{1}{2} \times \ldots \times \dfrac{1}{2} \;=\; \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \\ \mathbb{P}_{A_1}(C_n) & = & \mathbb{P}_{A_1}\big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i\big) \;=\; \mathbb{P}_{A_1}(F_1) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_1}(F_n) \;=\; 1 \times \ldots \times 1 \;=\; 1 \end{array}$$
On en conclut :
$$\mathbb{P}(C_n) \;=\; \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}(C_n) + \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}_{A_1}(C_n) \;=\; \frac{1}{3}\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$
car $\frac{1}{2} \in\ ]-1, 1[$. On retrouve bien le résultat énoncé.
- Cette démonstration permet de comprendre le résultat :
  × si on choisit la pièce 0, l'événement $[X = 0]$ se produit avec probabilité nulle.
  × si on choisit la pièce 1 (ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{3}$), l'événement $[X = 0]$ est l'événement certain puisqu'on n'obtient que des Face avec cette pièce. Il se produit alors avec probabilité 1.
  × si on choisit la pièce 2, l'événement $[X = 0]$ est l'événement impossible puisqu'on n'obtient que des Pile avec cette pièce. □

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum n\ \mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k\ \mathbb{P}([X = k])$. Alors, pour $n \geqslant 2$:
$$\begin{array}{rcl} S_n & = & \cancel{0 \times \mathbb{P}\big([X = 0]\big)} + 1 \times \mathbb{P}\big([X = 1]\big) + \sum\limits_{k=2}^{n} k\ \mathbb{P}([X = k]) \\ & = & \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=2}^{n} k\ \dfrac{1}{3}\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \;=\; \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\ \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=2}^{n} k\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} \end{array}$$

- On fait alors apparaître la somme partielle d'une série géométrique dérivée première convergente car de raison $\frac{1}{2} \in \,]-1,1[$:

$$\sum_{k=2}^{n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) - 1 \times 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1 = 4-1 = 3$$

- On en déduit que X admet une espérance, donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \, \mathbb{P}([X=k]) = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{\cancel{3}} \frac{1}{2} \cancel{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 1}$$

□

3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance.
En déduire que X possède une variance et vérifier que $\mathbb{V}(X) = \frac{4}{3}$.

Démonstration.

- Par théorème de transfert, la v.a.r. $X(X-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum n(n-1) \, \mathbb{P}([X=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1) \, \mathbb{P}([X=k]) = \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1) \, \mathbb{P}([X=k])$. Alors, pour $n \geqslant 2$:

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}$$

en reconnaissant la somme partielle d'une série géométrique dérivée deuxième convergente car de raison $\frac{1}{2} \in \,]-1,1[$.
- On en déduit que $X(X-1)$ admet une espérance, donnée par :

$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \, \mathbb{P}([X=k]) = \lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2} 2 \times 2^3 = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = \frac{4}{3}}$$

- D'autre part :

$$X^2 = X(X-1) + X$$

Ainsi, X^2 admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance. Enfin, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\big(X^2\big) = \mathbb{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbb{E}(X) = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(X^2\big) = \frac{7}{3}}$$

- Enfin, par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big(X^2\big) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{7}{3} - 1^2 = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{4}{3}}$$

Commentaire

On a déjà rappelé les formules concernant les sommes géométriques.
Ajoutons celles des sommes géométriques dérivées première et deuxième. Pour $q \in]-1,1[$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k\ q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\ q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

☐

4. Justifier que Y suit la même loi que X.

Démonstration.
L'expérience décrite dans l'énoncé fait apparaître une symétrie des rôles de Pile et Face.
Plus précisément, pour chaque côté (Pile et Face), on dispose :
- × d'une pièce donnant ce côté avec probabilité $\frac{1}{2}$,
- × d'une deuxième pièce donnant toujours ce côté,
- × d'une troisième pièce donnant toujours l'autre côté.

De plus, le choix de la pièce se fait de manière équiprobable. Ainsi, la probabilité d'obtenir Pile à un certain rang est la même que la probabilité d'obtenir Face à ce même rang.

On en déduit que les v.a.r. X et Y qui donnent respectivement le rang d'apparition du premier Pile et du premier Face suivent la même loi.

☐

5. a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([Y = j])$.

Démonstration.
L'événement $[X = 1] \cap [Y = j]$ est réalisé si et seulement si le premier Pile apparaît au 1^{er} rang et le premier Face apparaît au $j^{\text{ème}}$ rang. Ainsi, cet événement est réalisé par tous les ∞-tirages qui commencent par $j-1$ Pile suivis d'un Face :

$$[X = 1] \cap [Y = j] \ = \ P_1 \cap \ldots \cap P_{j-1} \cap F_j \ = \ [Y = j]$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([X = 1] \cap [Y = j]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([Y = j]\big).}$$

☐

b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = i])$.

Démonstration.
On retrouve la question précédente en échangeant les rôles de Face et Pile. Par un raisonnement analogue, on obtient :

$$[X = i] \cap [Y = 1] \ = \ F_1 \cap \ldots \cap F_{i-1} \cap P_i \ = \ [X = i]$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = 1]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([X = i]\big).}$$

☐

6. Loi de $X + Y$.

a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs positives sauf 0 et 2.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$ un ∞-tirage. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, trois cas se présentent.
- Si $X(\omega) = 0$ c'est qu'on n'a pas obtenu de Pile lors de ce tirage.
  Dans ce cas, on obtient Face dès le premier tirage. Ainsi :

$$(X + Y)(\omega) \ = \ X(\omega) + Y(\omega) \ = \ 0 + 1 \ = \ 1$$

- Si $X(\omega) = 1$ c'est qu'on obtient Pile lors du premier tirage. Dans ce cas :
  - × soit Face n'apparaît pas du tout dans le tirage ω. Alors $Y(\omega) = 0$ et :

$$(X+Y)(\omega) \ = \ X(\omega) + Y(\omega) \ = \ 1$$

  - × soit Face apparaît dans le tirage, ce qui se produit au mieux pour la première fois au $2^{\text{ème}}$ rang. En notant $Y(\omega) = j \in [\![2, +\infty[\![$, on obtient :

$$(X+Y)(\omega) \ = \ X(\omega) + Y(\omega) \ = \ 1 + j \in [\![3, +\infty[\![$$

  Il est à noter que la v.a.r. $X + Y$ peut prendre toutes les valeurs $k \in [\![3, +\infty[\![$: il suffit pour cela de considérer un ∞-tirage commençant par $k-1$ Pile successifs et suivi d'un Face au $k^{\text{ème}}$ rang.

- Si $X(\omega) = i \in [\![2, +\infty[\![$ c'est qu'on obtient Pile pour la première fois au $i^{\text{ème}}$ rang.
  On a alors obtenu Face lors du 1^{er} tirage.

$$(X+Y)(\omega) \ = \ X(\omega) + Y(\omega) \ = \ i + 1 \in [\![3, +\infty[\![$$

$$\boxed{(X+Y)(\Omega) \ = \ \{1\} \cup [\![3, +\infty[\![}$$

□

b) Montrer que $\mathbb{P}\big([X+Y=1]\big) = \dfrac{2}{3}$.

Démonstration.
Comme détaillé dans la question précédente, l'événement $[X+Y=1]$ est réalisé si on n'obtient jamais Face ou si on n'obtient jamais Pile. Ainsi :

$$[X+Y=1] \ = \ [X=0] \cup [Y=0]$$

Ces deux événements étant incompatibles, on obtient :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([X+Y=1]\big) & = & \mathbb{P}\big([X=0]\big) + \mathbb{P}\big([Y=0]\big) & \\ & = & \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \ = \ \dfrac{2}{3} & \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{1.c)}} \textit{ et } \textbf{\textit{4.}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X+Y=1]\big) = \frac{2}{3}}$$

□

c) Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$[X+Y=n] = \big([X=1] \cap [Y=n-1]\big) \bigcup \big([Y=1] \cap [X=n-1]\big)$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$. On procède par double inclusion.
Soit $\omega \in \Omega$ un ∞-tirage.

($\subset$) Supposons $\omega \in [X+Y=n]$. Autrement dit : $X(\omega) + Y(\omega) = n$. Comme $n \geqslant 3$, cela démontre, comme déjà vu en question ***6.a)*** que l'∞-tirage ω contient au moins un Pile (si ce n'est pas le cas, Face apparaît dès le premier lancer et dans ce cas $Y(\omega) = 1$ et $X(\omega) + Y(\omega) = 1$). Notons alors i le rang du premier Pile dans ω. Deux cas se présentent.

- Soit $i = 1$: dans ce cas, $X(\omega) = 1$.
  Or, comme $X(\omega) + Y(\omega) = n$ alors $Y(\omega) = n - 1$.

  Ainsi, $\omega \in [X=1] \cap [Y=n-1]$.

– Soit $i \in [\![2, +\infty[\![$: dans ce cas, l'∞-tirage ω débute forcément par Face car le premier Pile apparaît au rang $i \geqslant 2$. Ainsi : $Y(\omega) = 1$ et $X(\omega) = i$. Or, comme $X(\omega) + Y(\omega) = n$ alors $i + 1 = n$ ou encore $i = n - 1$.

  Ainsi, $\omega \in [Y = 1] \cap [X = n - 1]$.

On en déduit : $\omega \in \big([X = 1] \cap [Y = n - 1]\big) \bigcup \big([Y = 1] \cap [X = n - 1]\big)$.

($\supset$) Supposons $\omega \in \big([X = 1] \cap [Y = n - 1]\big) \bigcup \big([Y = 1] \cap [X = n - 1]\big)$. Ainsi :

× soit $\omega \in [X = 1] \cap [Y = n - 1]$.
  Dans ce cas $X(\omega) = 1$, $Y(\omega) = n - 1$ et ainsi : $X(\omega) + Y(\omega) = n$.

× soit $\omega \in [X = n - 1] \cap [Y = 1]$.
  Dans ce cas $X(\omega) = n - 1$, $Y(\omega) = 1$ et ainsi : $X(\omega) + Y(\omega) = n$.

Ainsi, dans les deux cas $X(\omega) + Y(\omega) = n$ et donc : $\omega \in [X + Y = n]$.

Commentaire

- Par définition, un événement est un ensemble. Démontrer l'égalité de deux ensembles c'est démontrer que tout élément du premier ensemble est dans le second et inversement. Ou encore qu'un élément est dans le premier ensemble si et seulement si il est aussi dans le second.
- En terme d'événement, cela signifie que le premier événement est réalisé (il existe ω réalisant cet événement *i.e.* il existe ω appartenant à cet événement) si et seulement si le second événement est réalisé (l'élément ω précédent est aussi élément de cet événement).
- L'énoncé demande de « Justifier » une égalité entre événements. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes. On peut alors supposer qu'une rédaction sans les ω (en prenant comme hypothèse initiale : $X + Y = n$) serait acceptée. Cependant, il faut bien comprendre que toute v.a.r. Z est une application $Z : \Omega \to \mathbb{R}$. Écrire « si $Z = n$ » signifie donc que l'on considère tous les éléments $\omega \in \Omega$ tels que $Z(\omega) = n$ c'est à dire tous les éléments ω qui réalisent l'événement $[Z = n]$. D'ailleurs, on peut aussi rédiger en commençant par : « Supposons que l'événement $[X + Y = n]$ est réalisé ».

☐

d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$\mathbb{P}([X + Y = n]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big([X + Y = n]\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big([X = 1] \cap [Y = n - 1] \ \cup \ [Y = 1] \cap [X = n - 1]\big) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
= \ & \mathbb{P}\big([X = 1] \cap [Y = n - 1]\big) + \mathbb{P}\big([Y = 1] \cap [X = n - 1]\big) && \textit{(car les deux événements de cette réunion sont incompatibles)} \\
= \ & \mathbb{P}\big([Y = n - 1]\big) + \mathbb{P}\big([X = n - 1]\big) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.}}\textit{)} \\
= \ & \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X + Y = n]\big) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

☐

7. Informatique.
On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1, 1, 'uin', 0, m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).
On décide de coder Pile par 1 et Face par 0.

a) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
1  piece = grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
2  x = 1
3  if piece == 0 then
4      lancer == grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
5      while lancer == 0
6          lancer = ---
7          x = ---
8      end
9  else
10     if piece == 1 then
11         x = ---
12     end
13 end
14 disp(x)
```

Démonstration.

- En ligne 1, la variable `piece` doit contenir un entier aléatoire compris entre 0 et 2 ce qui permet de coder le choix de la pièce qui sera utilisée pour les tirages.

```
1  piece = grand(1, 1, 'uin', 0, 2)
```

- La structure conditionnelle qui suit (l'utilisation du `if`) permet de coder l'expérience pour chacune des pièces :
  - si la pièce 0 a été initialement choisie, on effectue un premier lancer qui doit donner Pile (représenté par 1) avec probabilité $\frac{1}{2}$ et Face (représenté par 0) avec probabilité $\frac{1}{2}$.

```
4      lancer == grand(1, 1, 'uin', 0, 1)
```

    On doit alors réitérer cet expérience tant que l'on n'obtient pas Pile, c'est à dire tant que l'on obtient Face, ce qui correspond à la condition :

```
5      while lancer == 0
```

    À chaque tour de boucle (on y rentre tant qu'on n'obtient pas Pile), on effectue un nouveau lancer avec cette pièce :

```
6          lancer = grand(1, 1, 'uin', 0, 1)
```

    On met alors à jour le compteur `x`, en l'incrémentant de 1 à chaque Face obtenu.

```
7          x = x + 1
```

    Ce compteur a été initialisé à 1 de sorte qu'en sortie de boucle il contient ce nombre 1 incrémenté de 1 à chaque Face. Ainsi, `x` contient bien le rang d'apparition du premier Pile.

– si la pièce 1 a été initialement choisie, alors à chaque tirage on obtient Face. Dans ce cas, la v.a.r. X prend la valeur 0. On met à jour la variable x en conséquence.

```
    if piece == 1 then
        x = 0
    end
```

– le dernier cas (choix de la pièce 2) n'apparaît pas explicitement dans cette structure conditionnelle (*cf* question suivante).

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procédera de même dans les autres questions **Scilab**. □

b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Démonstration.
Comme signalé dans la question précédente, le choix de la pièce 2 n'apparaît pas explicitement dans la structure conditionnelle. Cette pièce renvoie Pile à chaque lancer. Ainsi, si cette pièce est choisie, X prend la valeur 1. La variable x qui est initialisée à 1 ne nécessite donc pas de mise à jour.

Le cas de la pièce numérotée 2 n'apparaît pas explicitement dans le script mais est bien géré par ce programme.

□

Exercice 2 (EDHEC 2012)

1. Montrer que, si f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme f^2 est aussi diagonalisable (on rappelle : $f^2 = f \circ f$).

Démonstration.

- Supposons que l'endomorphisme f est diagonalisable.
  Il existe alors une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :
  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = D$$
  où D est une matrice diagonale.
- On remarque alors :
  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = D \times D = D^2$$
  Ainsi, l'endomorphisme f^2 est diagonalisable.

$$\boxed{\text{Si l'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable, alors il en est de même de } f^2.}$$ □

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse. Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. a) Déterminer la matrice A^2 puis établir : $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.

Démonstration.

- Tout d'abord :
  $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
  $$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$
- Ainsi :
  $$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  $$\boxed{\text{On a bien : } A^4 = I.}$$
- D'après le calcul précédent, on a : $A^4 - I = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  On en déduit que le polynôme :
  $$Q(X) = X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$$
  est un polynôme annulateur de la matrice A. Ainsi :
  $$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{-1, 1\}$$

$$\boxed{\text{Les seules valeurs propres possibles de } A \text{ sont } -1 \text{ et } 1.}$$ □

b) Donner une base (u) de $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$.

Démonstration.
Dans la suite, notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Déterminons $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$.
  Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}) & \iff & (g - \mathrm{id})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \iff & (A - I) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & 6y & + & 4z & = & 0 \\ 3x & - & 8y & + & 5z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & + & 2y & = & z \\ & - & 2y & = & -2z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & & & = & -z \\ & - & 2y & = & -2z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}) & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \quad \text{et} \quad y = z\} \\
& = & \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{z \cdot (1, 1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\,((1, 1, 1))
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 1)).}$$

- La famille $\mathcal{F}_1 = \big((1, 1, 1)\big)$ est :
  × génératrice de $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$,
  × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{En notant } u = (1, 1, 1), \text{ on conclut que } \mathcal{F}_1 = (u) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}).}$$

Commentaire

- On démontre dans cette question : $\text{Ker}(g-\text{id}) = \text{Vect}\,(u)$. En particulier, $\text{Ker}(g-\text{id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Cela démontre que 1 est bien valeur propre de g et que $\text{Ker}(g-\text{id}) = E_1(g)$ est le sous-espace propre de g associé à cette valeur propre.
- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille $\big((1,1,1)\big)$ contient seulement 1 vecteur. Cette famille est donc finie, de cardinal 1 (ce qu'on note $\text{Card}\,\big((1,1,1)\big) = 1$).
- L'ensemble $\text{Vect}\,((1,1,1))$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires du vecteur $(1,1,1)$. C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base d'un espace vectoriel, tout vecteur de cet espace vectoriel se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\text{Card}\,\big(\text{Vect}\,((1,1,1))\big)}$ et $\cancel{\text{dim}\,\big((1,1,1)\big)}$ n'ont aucun sens !
- Par ailleurs, il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $\text{Ker}(g-\text{id})$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Si u et $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sont deux représentations différentes du même triplet u, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{x\cdot e_1 + y\cdot e_2 + z\cdot e_3}_{\in \mathbb{R}^3} \;\cancel{=}\; \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\text{Vect}\,((1,1,1))}_{\subseteq E_1(g)} \;\cancel{=}\; \underbrace{\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{\subseteq E_1(A)}$$

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I$. Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 1$.
  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_1(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que :
  $(A - I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x\cdot C_1 + y\cdot C_2 + z\cdot C_3 \\ &= x\cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} + z\cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Si l'on choisit $x \neq 0$, pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on peut choisir $y = z = x$.

  En prenant par exemple $x = 1$, on obtient : $E_1(A) \;\supset\; \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

  Cette inclusion est en réalité une égalité. En effet, d'après le théorème du rang :

$$\text{dim}\,\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) \;=\; \text{dim}\,\big(E_1(A)\big) \;+\; \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\text{rg}(A - I_3)}$$

  (par un calcul rapide à l'aide de l'algorithme du pivot)

  Ainsi : $\text{dim}\,\big(E_1(A)\big) = 3 - 2 = 1$ et l'égalité annoncée est vérifiée.

$\square$

c) Déterminer $\mathrm{Ker}(g+\mathrm{id})$.

Démonstration.

- Déterminons $\mathrm{Ker}(g+\mathrm{id})$.
  Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u=(x,y,z)$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in \mathrm{Ker}(g+\mathrm{id}) & \Longleftrightarrow & (g+\mathrm{id})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Longleftrightarrow & (A+I) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 4 \\ 3 & -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 4\,y & + & 4\,z & = & 0 \\ 3\,x & - & 8\,y & + & 7\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3\,L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & - & 8\,y & + & 6\,z & = & 0 \\ & - & 14\,y & + & 10\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow 4\,L_3 - 7\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & - & 8\,y & + & 6\,z & = & 0 \\ & & & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \\
& & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\mathrm{Ker}(g+\mathrm{id}) \ = \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z=0\} = \{(0,0,0)\}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Ker}(g+\mathrm{id}) = \big\{(0,0,0)\big\}.}$$

Commentaire

- Généralement, les énoncés sont construits comme suit.
  1) Déterminer un polynôme annulateur de g. En déduire les valeurs propres possibles de g.
  2) Déterminer les valeurs propres de g.
  3) Déterminer les sous-espaces propres de g.
  En point ***3)***, on détermine des sous-espaces propres. Par définition, ce sont des ensembles différents de l'ensemble $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
- Dans cet énoncé, on adopte une présentation légèrement différente.
  1) Déterminer un polynôme annulateur de g. En déduire les valeurs propres possibles de g.
  2) Déterminer $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(g+\mathrm{id})$.
  À la fin du point ***1)***, on ne connaît pas les valeurs propres de g. En particulier, ce serait une erreur de noter $E_1(g) = \mathrm{Ker}(g-\mathrm{id})$ car on ne sait pas encore si 1 est bien valeur propre.
  Le point ***2)*** permet de conclure que 1 est bien valeur propre de g (car $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$) alors que -1 ne l'est pas (car $\mathrm{Ker}(g+\mathrm{id}) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$).

$\square$

d) En déduire que g n'est pas diagonalisable.

Démonstration.

- En question ***2.b)***, on démontre : $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)$.

$$\boxed{\text{On en conclut que 1 est bien valeur propre de } g.}$$

- En question ***2.c)***, on démontre : $\mathrm{Ker}(g + \mathrm{id}) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$\boxed{\text{On en conclut que } -1 \text{ n'est pas valeur propre de } g.}$$

- Or, comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$, on a :

$$\mathrm{Sp}(g) \ = \ \mathrm{Sp}(A) \ \subset \ \{-1, 1\}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'endomorphisme } g \text{ possède 1 comme seule et unique valeur propre.}}$$

- De plus, comme (u) est une base de $E_1(g)$, alors :

$$\dim\left(E_1(g)\right) \ = \ \mathrm{Card}\left((u)\right) \ = \ 1 \ \neq \ 3 \ = \ \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'endomorphisme } g \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- On démontre dans cette question que g possède une unique valeur propre. Dans ce cas, il est possible de démontrer par l'absurde que g n'est pas diagonalisable. Rappelons ce procédé.
- Démontrons que g n'est pas diagonalisable. On procède par l'absurde.
  Supposons que g est diagonalisable. Il en est alors de même de la matrice A.
  Il existe alors :
  - × $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible,
  - × $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A,

  telles que : $A = PDP^{-1}$. Or $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. Donc :

$$A \ = \ P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \ = \ P\, I_3\, P^{-1} \ = \ PP^{-1} \ = \ I_3$$

  ce qui est absurde.

□

3. a) Résoudre l'équation $A^2\,X = -X$, d'inconnue le vecteur X élément de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base (v, w) de $\mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{id})$.

Démonstration.

- Déterminons $\mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{id})$.
  Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in \mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{id}) & \Longleftrightarrow & (g^2 + \mathrm{id})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Longleftrightarrow & (A^2 + I) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & + & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{id}) & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - z\} \\
& = & \{(y - z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\
& = & \{y \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (-1, 0, 1) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\
& = & \mathrm{Vect}\,((1, 1, 0), (-1, 0, 1))
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 0), (-1, 0, 1)).}$$

- La famille $\mathcal{F} = \big((1, 1, 0), (-1, 0, 1)\big)$ est :
  × génératrice de $\mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{id})$,
  × libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{En notant } v = (1, 1, 0) \text{ et } w = (-1, 0, 1) \text{, on conclut que } \mathcal{F} = (v, w) \\ \text{est une base de } \mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{id}).\end{array}}$$

□

b) Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Démontrons que la famille (u, v, w) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3}$. $(*)$

$$\begin{array}{rrcl}
\text{Or :} \quad (*) & \Longleftrightarrow & \lambda_1 \cdot (1, 1, 1) + \lambda_2 \cdot (1, 1, 0) + \lambda_3 \cdot (-1, 0, 1) & = \ (0, 0, 0) \\
& \Longleftrightarrow & (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3) = (0, 0, 0) & \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. &
\end{array}$$

$$\text{Ainsi : } (*) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \{\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (u, v, w) \text{ est libre.}}$$

- Ainsi, la famille (u, v, w) est :
  - × une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
  - × telle que : $\text{Card}\big((u, v, w)\big) = 3 = \dim\big(\mathbb{R}^3\big)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

□

c) Écrire la matrice de g^2 dans la base (u, v, w) et conclure.

Démonstration.

- $$\begin{array}{rcll} g^2(u) & = & g\big(g(u)\big) & \\ & = & g\big(u\big) & \textit{(car } u \textit{ est un vecteur propre associé à la valeur propre } 1\textit{)} \\ & = & u & \textit{(car } u \textit{ est un vecteur propre associé à la valeur propre } 1\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi : $g^2(u) = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$. On en conclut : $\text{Mat}_{(u,v,w)}\big(g^2(u)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $g^2(v) = -v$ *(car $v \in \text{Ker}(g^2 + \text{id})$)*

  Ainsi : $g^2(v) = 0 \cdot u - 1 \cdot v + 0 \cdot w$. On en conclut : $\text{Mat}_{(u,v,w)}\big(g^2(v)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $g^2(w) = -w$ *(car $w \in \text{Ker}(g^2 + \text{id})$)*

  Ainsi : $g^2(w) = 0 \cdot u + 0 \cdot v - 1 \cdot w$. On en conclut : $\text{Mat}_{(u,v,w)}\big(g^2(w)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \text{Mat}_(u, v, w)\ \big(g^2\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

- On a exhibé dans cet exercice un endomorphisme g tel que :
  - × g n'est pas diagonalisable,
  - × g^2 est diagonalisable.
    (puisqu'on a trouvé une base $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ telle que $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(g^2\big)$ est diagonale).

  Ainsi, si on sait que $g \circ g$ est diagonalisable, il n'en est pas nécessairement de même de g.

$$\boxed{\text{La réciproque de l'énoncé de la question } \textbf{\textit{1.}} \text{ n'est pas vérifiée.}}$$

□

Exercice 3 (EDHEC 2019)

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$. On a donc, en particulier : $u_0 = 1$.

1. Déterminer u_1 et u_2.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue sur le segment $[0,1]$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est bien définie.}}$$

- Ensuite :

$$u_1 = \int_0^1 (1-t^2)^1 \, dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(0 - \frac{0}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{u_1 = \frac{2}{3}}$$

- Enfin :

$$u_2 = \int_0^1 (1-t^2)^2 \, dt = \int_0^1 (1-2\,t^2+t^4) \, dt = \left[t - 2\,\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = 1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5} = \frac{1}{3}+\frac{1}{5} = \frac{5+3}{15}$$

$$\boxed{u_2 = \frac{8}{15}}$$

□

2. a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} \, dt - \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n \, dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^n \left((\cancel{1} - t^2) - \cancel{1}\right) dt \\ &= -\int_0^1 t^2\,(1-t^2)^n \, dt \end{aligned}$$

- Or, soit $t \in [0,1]$.

	$0 \leqslant t \leqslant 1$	
donc	$0 \leqslant t^2 \leqslant 1$	*(par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0,+\infty[$)*
d'où	$0 \geqslant -t^2 \geqslant -1$	
ainsi	$1 \geqslant 1-t^2 \geqslant 0$	
alors	$1 \geqslant (1-t^2)^n \geqslant 0$	*(par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0,+\infty[$)*
donc	$t^2 \geqslant t^2\,(1-t^2)^n \geqslant 0$	*(car $t^2 \geqslant 0$)*

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\int_0^1 t^2 \, (1-t^2)^n \; dt \;\; \geqslant \;\; 0$$

On en déduit : $u_{n+1} - u_n \;\; = \;\; -\displaystyle\int_0^1 t^2 \, (1-t^2)^n \; dt \;\; \leqslant \;\; 0.$

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

□

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Démonstration.

- On a déjà démontré en question précédente : $\forall t \in [0,1]$, $(1-t^2)^n \geqslant 0$.
  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\underbrace{\int_0^1 (1-t^2)^n \; dt}_{= \, u_n} \;\; \geqslant \;\; 0$$

- On en déduit que la suite (u_n) est :
  × décroissante (d'après la question précédente),
  × minorée par 0.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc convergente.}}$$

□

3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).

a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \; dt$.

Démonstration.
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ est une densité d'une v.a.r. X de loi $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \; dt \text{ converge et : } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \; dt = 1.}$$

□

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt$, puis celle de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\,\sigma^2}}\, dt$ est convergente et :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\,\sigma^2}}\, dt \;=\; \sigma\,\sqrt{2\pi}$$
- Choisissons alors σ tel que : $\dfrac{1}{2\,\sigma^2} = n$, c'est-à-dire, comme $n > 0$:
$$2\,\sigma^2 = \frac{1}{n} \;\Leftrightarrow\; \sigma^2 = \frac{1}{2\,n} \;\Leftrightarrow\; \sigma = \sqrt{\frac{1}{2\,n}} = \frac{1}{\sqrt{2\,n}}$$
où la dernière équivalence est vérifiée car $\sigma > 0$.
- Alors, d'après la question précédente l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt$ est convergente et :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\,n}}\,\sqrt{2\pi} \;=\; \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}\,\sqrt{n}}\,\cancel{\sqrt{2}}\,\sqrt{\pi} \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{, l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt \text{ converge et : } \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{n}}.}$$

- Tout d'abord, comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt$ est convergente, alors les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt$ sont également convergentes.
- On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \quad \text{(et donc } t = -u\text{)} \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = -\infty \;\Rightarrow\; u = +\infty \\ \bullet\ t = 0 \;\Rightarrow\; u = 0 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
On obtient alors :
$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt \;=\; \int_{+\infty}^{0} \mathrm{e}^{-n\,(-u)^2}\big(-\,du\big) \;=\; \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,u^2}\, du$$
- On en déduit :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt \;=\; \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt \;=\; 2\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt$$
Ainsi :
$$\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt \;=\; \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\, dt \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

Commentaire

- Le programme officiel stipule que « les changements de variable affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque ». Pour autant, ce type de changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence (ce qu'on a bien fait en premier lieu).
- Cela signifie aussi que, de manière générale, on ne peut effectuer de changement de variable directement sur une intégrale impropre : on doit se ramener au préalable sur une intégrale sur un segment.
- L'énoncé n'introduit pas la variable n dans cette question. Cependant, on remarque la nécessité de son appartenance à $\mathbb{N}^*$ (et non $\mathbb{N}$). En effet, si $n = 0$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-0\, t^2} \, dt$ est divergente (car l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} 1 \, dt$ l'est).

□

c) Montrer que, pour tout réel t, on a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 1 - t^2$.

Démonstration.

- La fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^t$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ se situe au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{array}{rcl} y & = & g(0) + g'(0)\,(x-0) \\ & = & \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0\, x \ = \ 1 + x \end{array}$$

On en déduit donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$. En appliquant la propriété ci-dessus à $x = -t^2 \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\mathrm{e}^{-t^2} \ \geqslant \ 1 + (-t^2)$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 1 - t^2.}$$

Commentaire

- Notons tout d'abord que la variable t étant sous la portée d'un quantificateur, elle est muette. Ainsi, le résultat démontré est bien celui souhaité.
- Il est possible de procéder différemment.
On peut considérer la fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} - 1 - t^2$, procéder à son étude et conclure quant à son signe :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ h(t) \geqslant 0$$

ce qui correspond à l'inégalité souhaitée.

□

d) En déduire : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$. Puis donner la limite de la suite (u_n).

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $t \in [0,1]$. On rappelle qu'on a démontré dans la question ***2.a)*** : $1 - t^2 \geqslant 0$. Ainsi :

$$\begin{array}{lrclcll} & 0 & \leqslant & 1-t^2 & \leqslant & \mathrm{e}^{-t^2} & \textit{(d'après la question précédente)} \\ \text{donc} & 0 & \leqslant & (1-t^2)^n & \leqslant & \left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)^n & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^n \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ \text{d'où} & 0 & \leqslant & (1-t^2)^n & \leqslant & \mathrm{e}^{-n\,t^2} & \end{array}$$

- On sait de plus :
  × que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$ est bien définie d'après ***1.***,
  × que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt$ est bien définie également car la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-n\,t^2}$ est continue sur le segment $[0,1]$.
- Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$:

$$0 \leqslant \underbrace{\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt}_{= u_n} \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt$$

- Enfin, par relation de Chasles (toutes les intégrales en présence sont convergentes d'après la question ***3.b)***) :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt = \int_0^1 \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt$$

  Or : $\forall t \in [1,+\infty[$, $\mathrm{e}^{-n\,t^2} \geqslant 0$.
  Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt \geqslant 0$$

  On en déduit :

$$\underbrace{\int_0^1 \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt}_{= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt} \geqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt$$

  Alors, par transitivité :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt$$

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{\textit{3.b)}} : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}.}$$

- On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$. Or :
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$,
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}} = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

Commentaire

- Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.
  Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$,
  1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à-dire montrer :
  $$\forall t \in [a, b],\ h_1(t) \leqslant f(t) \leqslant h_2(t)$$
  où h_1 et h_2 sont deux fonctions définies sur $[a, b]$, déterminées grâce aux questions précédentes ou grâce à l'étude de f,
  2) **si les intégrales** $\displaystyle\int_a^b h_1(t)\, dt$ **et** $\displaystyle\int_a^b h_2(t)\, dt$ **sont convergentes**, on utilise ensuite la croissance de l'intégrale (si les bornes a et b sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :
  $$\int_a^b h_1(t)\, dt \ \leqslant\ \int_a^b f(t)\, dt \ \leqslant\ \int_a^b h_2(t)\, dt$$
  On peut résumer ce schéma par la phrase suivante : pour encadrer une intégrale, on commence toujours par encadrer son intégrande.
- On peut faire ici la même remarque qu'en question ***3.b)*** : la variable n n'est pas introduite ici, mais elle appartient nécessairement à $\mathbb{N}^*$ pour que la quantité $\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ soit bien définie.

□

4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\, dt$ puis montrer : $u_n \geqslant \frac{1}{n+1}$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne la série de terme général u_n ?

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction $t \mapsto (1-t)^n$ est continue sur le segment $[0, 1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\, dt$ est donc bien définie.
- On effectue le changement de variable $\boxed{u = 1 - t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = 1 - t \quad \text{(et donc } t = 1 - u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 1 \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto 1 - u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

On obtient alors :

$$\int_0^1 (1-t)^n \, dt \;=\; \int_1^0 u^n (-\, du) \;=\; \int_0^1 u^n \, du \;=\; \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \;=\; \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\int_0^1 (1-t)^n \, dt = \frac{1}{n+1}}$$

- Soit $t \in [0,1]$.

$$\begin{array}{lccccc}
\text{Comme} & 0 & \leqslant & t & \leqslant & 1 \\[2mm]
\text{alors} & 0 & \leqslant & t^2 & \leqslant & t \\[2mm]
\text{donc} & 0 & \geqslant & -t^2 & \geqslant & -t \\[2mm]
\text{d'où} & 1 & \geqslant & 1-t^2 & \geqslant & 1-t \\[2mm]
\text{ainsi} & 1 & \geqslant & (1-t^2)^n & \geqslant & (1-t)^n
\end{array}$$

(par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0,+\infty[$)

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_0^1 1 \, dt & \geqslant & \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt & \geqslant & \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \, dt \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\
1 & & u_n & & \dfrac{1}{n+1}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \frac{1}{n+1}.}$$

- On obtient :
  × $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n$
  × la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$). Elle est donc divergente.

$$\boxed{\text{Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série } \sum_{n \geqslant 0} u_n \text{ est divergente.}}$$

Commentaire

Revenons sur l'assertion « la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ».

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1}$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par décalage d'indice :

$$S_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \;=\; \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \;=\; T_{n+1}$$

Les suites (S_n) et (T_n) sont donc bien identiques, à décalage d'indice près.

□

5. a) Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} \ = \ (2n+2)(u_n - u_{n+1})$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} \ = \ \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} \, dt$$

On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & (1-t^2)^{n+1} & & u'(t) & = & -2\,(n+1)\,t\,(1-t^2)^n \\ v'(t) & = & 1 & & v(t) & = & t \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
On obtient alors :

$$\begin{array}{cll} & \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{n+1} \, dt & \\ = & \cancel{\Big[\, t\,(1-t^2)^{n+1} \,\Big]_0^1} - \displaystyle\int_0^1 -2\,(n+1)\,t\,(1-t^2)^n \, t \, dt & \\ = & 2\,(n+1) \displaystyle\int_0^1 t^2\,(1-t^2)^n \, dt & \\ = & 2\,(n+1) \displaystyle\int_0^1 (t^2-1+1)\,(1-t^2)^n \, dt & \\ = & 2\,(n+1) \displaystyle\int_0^1 \big((t^2-1)\,(1-t^2)^n + (1-t^2)^n\big) \, dt & \\ = & 2\,(n+1) \left(- \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)\,(1-t^2)^{n+1} \, dt + \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt \right) & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ = & 2\,(n+1) \left(- \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{n+1} \, dt + u_n \right) & \textit{(par définition de } u_n\textit{)} \\ = & 2\,(n+1)(-u_{n+1} + u_n) & \textit{(par définition de } u_{n+1}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1}).}$$

□

b) En déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n = \dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!}$.

▸ **Initialisation** :
D'une part, d'après l'énoncé : $u_0 = 1$.
D'autre part : $\dfrac{4^0\,(0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!} \ = \ \dfrac{1 \times 1^2}{1!} \ = \ 1.$
D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} = \dfrac{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{\big(2(n+1)+1\big)!} = \dfrac{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2n+3)!}$).

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = (2n+2)\,(u_n - u_{n+1}) \quad &\Leftrightarrow \quad u_{n+1} = (2n+2)\,u_n - (2n+2)\,u_{n+1} \\ &\Leftrightarrow \quad \big(1 + (2n+2)\big)\,u_{n+1} = 2\,(n+1)\,u_n \\ &\Leftrightarrow \quad u_{n+1} = \frac{2\,(n+1)}{2n+3}\;u_n \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2\,(n+1)}{2n+3}\;u_n \\ &= \frac{2\,(n+1)}{2n+3}\;\frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{2\,(n+1)}{2n+3}\;\frac{2n+2}{2n+2}\;\frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2\,(n+1)\times 2\,(n+1)\times 4^n\,(n!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{4\,(n+1)^2\times 4^n\,(n!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{4^{n+1}\left((n+1)\,n!\right)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2n+3)!} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

□

c) On admet l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\,n^n\,\mathrm{e}^{-n}$. En écrivant $u_n = \dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)\,(2n)!}$, montrer :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Démonstration.

- En utilisant l'indication de l'énoncé :

$$\begin{array}{ccc} 4^n\,(n!)^2 & \underset{n\to+\infty}{\sim} & 4^n\left(\sqrt{2\pi n}\,n^n\,\mathrm{e}^{-n}\right)^2 \\ & & \shortparallel \\ & & 4^n\times 2\pi n\,n^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n} \;=\; 2\pi\,4^n\,n^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-2n} \end{array}$$

- De même, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n = +\infty$:

$$\begin{array}{rcl} (2n+1)\,(2n)! & \underset{n \to +\infty}{\sim} & 2n \times \left(\sqrt{2\pi(2n)}\,(2n)^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}\right) \\ & & \shortparallel \\ & & 2n \times 2\sqrt{\pi}\,\sqrt{n}\,2^{2n}\,n^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n} \quad = \quad 4\sqrt{\pi}\,\sqrt{n}\,4^n\,n^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-2n} \end{array}$$

- On en déduit :

$$u_n \; = \; \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)\,(2n)!} \; \underset{n \to +\infty}{\sim} \; \frac{2\pi\,\cancel{4^n\,n^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-2n}}}{4\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{n}\,\cancel{4^n\,n^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-2n}}} \; = \; \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.}$$

□

6. Informatique.
On admet que, si `t` est un vecteur, la commande `prod(t)` renvoie le produit des éléments de `t`.
Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher la valeur de u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input('entrez une valeur pour n :')
x = 1:n
m = 2 ⋆ n + 1
y = 1:m
v = ..........
w = ..........
u = .......... ⋆ v^2 / w
disp(u)
```

Démonstration.

- Commentons tout d'abord le début du programme proposé.
  - × On commence par demander à l'utilisateur d'entrer une valeur pour l'entier `n`.

```
n = input('entrez une valeur pour n :')
```

  - × On stocke ensuite dans la variable `x` la matrice ligne contenant les entiers de 1 à `n`.

```
x = 1:n
```

  - × On stocke de plus dans la variable `m` la quantité $2\mathtt{n} + 1$.

```
m = 1 ⋆ n + 1
```

  - × On stocke enfin dans la variable `y` la matrice ligne contenant les entiers de 1 à `m`, c'est-à-dire les entiers de 1 à $2\mathtt{n} + 1$.

```
y = 1:m
```

- On cherche maintenant à stocker dans la variable `u` la valeur de $u_{\mathtt{n}}$.
  D'après la question ***5.b)***, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{4^n \, (n!)^2}{(2n+1)!}$$

  × L'énoncé propose de compléter la commande suivante :

```
7  u = .......... ⋆ v ^ 2 / w
```

  Par analogie avec la formule de la question ***5.b)***, on souhaite donc stocker dans la variable `v` la valeur $\mathtt{n}!$ et dans la variable `w` la valeur $(2\mathtt{n}+1)!$.

  × On cherche alors une commande permettant d'obtenir $\mathtt{n}! = 1 \times \cdots \times \mathtt{n}$.
  D'après l'énoncé, la commande `prod(t)` renvoie le produit des éléments de `t`.
  La variable `x` contient les entiers de 1 à `n`. Ainsi, pour obtenir $\mathtt{n}!$, on peut utiliser la commande : `prod(x)`. On obtient donc :

```
5  v = prod(x)
```

  × De même, comme la variable `y` contient les entiers de 1 à $2\mathtt{n}+1$, pour obtenir $(2\mathtt{n}+1)!$, on peut utiliser la commande : `prod(y)`. On obtient :

```
6  w = prod(y)
```

  × Pour finir, on complète la ligne 7 de la façon suivante (toujours d'après la formule de ***5.b)***) :

```
7  u = (4 ^ n) ⋆ v ^ 2 / w
```

Commentaire

- On pouvait aussi stocker la valeur $\mathtt{n}!$ dans la variable `v` à l'aide d'une boucle `for` :

```
v = 1
for i = 1:n
  v = v ⋆ i
end
```

- Comme dit précédemment, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la mécanismes en jeu et est suffisant pour obtenir les points alloués à cette question.

□

Problème (EDHEC 2018)

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\, dt$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : étude de f

1. a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.

Démonstration.
Notons $g : t \mapsto \ln\left(1+t^2\right)$.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Remarquons tout d'abord : $1+t^2 \geqslant 1$.
  Ainsi, par croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$:
$$g(t) \ = \ \ln\left(1+t^2\right) \ \geqslant \ \ln(1) = 0$$
- La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $g = g_2 \circ g_1$ où :
  × $g_1 : t \mapsto 1+t^2$ est :
    – continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale,
    – telle que $g_1(\mathbb{R}) = [1,+\infty[\ \subset \ ]0,+\infty[$.
  × $g_2 : t \mapsto \ln(t)$, continue sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \geqslant 0$ alors la quantité $f(x)$ est bien définie comme intégrale sur le **segment** $[0,x]$ de la fonction g continue sur $[0,x]$.
  De plus : $\forall t \in [0,x]$, $g(t) \geqslant 0$.
  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant x)$:
$$f(x) \ = \ \int_0^x g(t)\, dt \ \geqslant \ 0$$
$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0}$$
  × si $x < 0$ alors la quantité $f(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\, dt = -\int_x^0 g(t)\, dt$ et bien définie comme opposée de l'intégrale sur le **segment** $[x,0]$ de la fonction g continue sur $[x,0]$.
  De plus : $\forall t \in [x,0]$, $g(t) \geqslant 0$.
  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(x < 0)$:
$$\int_x^0 g(t)\, dt \ \geqslant \ 0$$
  et ainsi : $f(x) \ = \ \displaystyle\int_0^x g(t)\, dt \ = \ -\int_x^0 g(t)\, dt \ \leqslant \ 0.$
$$\boxed{\forall x < 0,\ f(x) \leqslant 0}$$

Commentaire

On illustre dans cette question la rédaction attendue afin de démontrer qu'une composée de fonctions continues est continue. Par la même rédaction, on pourrait démontrer qu'une composée de fonctions dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$) est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$) en remplaçant chaque occurrence du terme « continue » par dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$). □

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

Démonstration.

- On a vu dans la question précédente que g est continue sur $\mathbb{R}$.
  Elle admet donc une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition :

$$f(x) \;=\; \int_0^x g(t)\,dt \;=\; \big[\,G(t)\,\big]_0^x \;=\; G(x) - G(0)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ car } G \text{ l'est.}}$$

(f est la somme d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et d'une constante)

- De plus :

$$f'(x) \;=\; G'(x) - 0 \;=\; g(x) \;=\; \ln\left(1+x^2\right)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \ln\left(1+x^2\right)}$$

Commentaire

- On peut aussi rédiger en se servant du fait que la fonction f est la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule au point 0. On en déduit immédiatement que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = g(x)$.
- L'intérêt de la démonstration précédente est qu'elle est plus générale et peut donc être adaptée à tous les cas particuliers. Imaginons par exemple une fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_0^{x^2} g(t)\,dt = \big[\,G(t)\,\big]_0^{x^2} = G(x^2) - G(0)$$

  La fonction h `N'EST PAS` une primitive de g.
  L'expression ci-dessus permet toutefois de conclure que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de $x \mapsto x^2$ par G toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 2x \times G'(x^2) = 2x \times g(x^2) = 2x\ \ln\left(1+x^2\right)$$

- Il n'y a pas, dans le programme ECE, de théorème permettant de dériver sous le symbole d'intégration. Les tentatives de ce genre révèlent une mauvaise compréhension des objets étudiés.

□

c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = g(x) = \ln\left(1+x^2\right)$$

- Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geqslant 1$. Ainsi, par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$:

$$\ln\left(1+x^2\right) \;\geqslant\; \ln(1) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}. \text{ La fonction } f' \text{ ne s'annulant qu'en un point} \\ (f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0), \text{ la fonction } f \text{ est même strictement croissante sur } \mathbb{R}.\end{array}}$$

□

2. ***a)*** Montrer que f est impaire.

Démonstration.

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, intervalle symétrique par rapport à 0.
- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(-x) = \int_0^{-x} \ln\left(1+t^2\right)\, dt$$
On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left| \begin{array}{l} u = -t \text{ (et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{ et } \quad dt = -\ du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \\ \bullet\ t = -x \ \Rightarrow\ u = x \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto -u$ est $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités 0 et x (c'est le segment $[0, x]$ si $x \geqslant 0$ ou le segment $[x, 0]$ si $x < 0$).

On obtient finalement :
$$f(-x) = \int_0^{-x} \ln\left(1+t^2\right)\, dt = \int_0^{x} \ln\left(1+(-u)^2\right)\, (-\ du) = -\int_0^{x} \ln\left(1+u^2\right)\, du = -f(x)$$

$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x) \text{ et la fonction } f \text{ est impaire.}}$ □

b) Étudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Démonstration.

- En question ***1.a)***, on a démontré que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $f' = g$. En adoptant la même rédaction que dans la question ***1.a)***, on démontre que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} \times 2x$$
Comme $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$, la quantité $f''(x)$ est du signe de $2x$.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est concave sur }]-\infty, 0] \text{ et convexe sur } [0, +\infty[. \text{ La fonction } f \text{ change de concavité en 0, seul point d'inflexion de la courbe représentative de } f.}$ □

3. a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

Démonstration.
Remarquons tout d'abord :

$$a + \frac{b}{1+t^2} = \frac{a\,(1+t^2)+b}{1+t^2} = \frac{(a+b)+at^2}{1+t^2}$$

Ainsi :

$$\frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2} \Leftrightarrow \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{(a+b)+at^2}{1+t^2}$$

Cette dernière égalité étant vérifiée pour tout réel t, elle est équivalente, par identification, au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 0 \\ a & & & = & 1 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} b & = & -1 \\ a & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } t \in \mathbb{R}, \ \frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}.}$$

□

b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = x \, \big(\ln(1+x^2) - 2\big) + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On calcule $\displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right) dt$ en procédant par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \ln\left(1+t^2\right) & & u'(t) & = & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ v'(t) & = & 1 & & v(t) & = & t \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités 0 et x (c'est le segment $[0, x]$ si $x \geqslant 0$ ou le segment $[x, 0]$ si $x < 0$).

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \int_0^x \ln\left(1+t^2\right) dt &= \Big[\ t \ \ln\left(1+t^2\right)\ \Big]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}\, dt \\ &= \left(x \ \ln\left(1+x^2\right) - \cancel{0 \ \ln(1)}\right) - 2 \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \quad \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= x \ \ln\left(1+x^2\right) - 2\int_0^x 1\, dt + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt \\ &= x \ \ln\left(1+x^2\right) - 2x + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = x \, \big(\ln(1+x^2) - 2\big) + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt}$$

□

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est une intégrale convergente.

Démonstration.
La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.

× $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$

× $\forall t \in [1,+\infty[,\ \dfrac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ (et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$)

× L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$).

Ainsi, par critère de convergence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est convergente.

De plus, comme la fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt \text{ est convergente.}}$$

□

b) En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(1+x^2)$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- D'après la question ***3.a)*** :

$$f(x) \ = \ x\ \ln(1+x^2) - 2x + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

- On en déduit, en divisant de part et d'autre par $x\ \ln(1+x^2) \neq 0$:

$$\frac{f(x)}{x\ \ln(1+x^2)} \ = \ 1 - 2\,\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\ \ln(1+x^2)} + 2\,\frac{\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt}{x\ \ln(1+x^2)}$$

- Or :

× $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$ ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(1+x^2)} = 0$.

× l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est convergente.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

D'autre part, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(1+x^2)} = 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} 2\,\frac{\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt}{x\ \ln(1+x^2)} \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x\ \ln(1+x^2)} \ = \ 1 \text{ et ainsi : } f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ \ln(1+x^2).}$$

Commentaire

- Dans cette question, il est demandé de démontrer que la fonction f est équivalente à la fonction $h : x \mapsto x \ \ln\left(1+x^2\right)$ au voisinage de $+\infty$. Pour ce faire, il faut systématiquement penser à former le quotient des deux fonctions.
Il s'agit alors de vérifier :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = 1$$
- Afin de pouvoir appliquer cette définition, on vérifiera au préalable que h ne s'annule pas dans un voisinage de $+\infty$ (ici on a : $\forall x > 0,\ h(x) \neq 0$).

$\square$

c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x\ \ln(x)$$

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- Remarquons tout d'abord : $1+x^2 = x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- On en déduit, par propriété de la fonction ln :
$$\ln\left(1+x^2\right) = \ln\left(x^2\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 2\ \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
- Enfin, d'après la question précédente :
$$\frac{f(x)}{2x\ \ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\ \ln\left(1+x^2\right)}{2x\ \ln(x)} = \frac{2x\ \ln(x) + x\ \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2x\ \ln(x)} = 1 + \frac{\cancel{x}\ \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\cancel{x}\ \ln(x)}$$
et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$ alors :
$$1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ \ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x\ \ln(x).}$$

$\square$

d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

Démonstration.

- D'après la question ***4.c)*** : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{2x\ \ln(x)} = 1$.
- On pose alors le changement de variable $X = -x$. On a alors :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x\ \ln(x)} &= \lim_{X\to-\infty} \frac{f(-X)}{2(-X)\ \ln(-X)} \\ &= \lim_{X\to-\infty} \frac{\cancel{-}f(X)}{\cancel{-}2X\ \ln(-X)} \qquad \textit{(car } f \textit{ est impaire)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit } \lim_{X\to-\infty} \frac{f(X)}{2X\ \ln(-X)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x\ \ln(x)} = 1 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} 2x\ \ln(-x).}$$

Commentaire

- Si une fonction est paire (resp. impaire) sur $\mathbb{R}$, alors on peut limiter son étude à l'intervalle $[0, +\infty[$ et en déduire le comportement de la fonction sur $]-\infty, 0]$.
  Plus précisément :
  - × si f est paire sur $\mathbb{R}$ alors la courbe représentative de f, $\mathcal{C}_f$, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On en déduit notamment que si f admet une limite en $+\infty$, alors elle admet la même limite en $-\infty$.
  - × si f est impaire sur $\mathbb{R}$ alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine. On en déduit notamment que si f admet une limite en $+\infty$, alors elle admet la limite opposée en $-\infty$.
- On écrit dans cette question $\ln(-X)$. On rappelle que l'écriture $-X$ ne désigne pas obligatoirement une quantité négative. Dans cette question, comme $X < 0$, on a $-X > 0$ ce qui permet l'écriture de $\ln(-X)$.

□

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
En question ***2.b)*** on a démontré que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée $f' = g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En adoptant la même rédaction que dans la question ***1.a)***, on démontre que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^3 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

□

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est à dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$$

b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Commençons par déterminer les dérivées successives de f.

$$f'(x) = \ln\left(1 + x^2\right), \qquad f''(x) = \frac{2x}{1 + x^2}, \qquad f^{(3)}(x) = \frac{2(1 + x^2) - 2x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}$$

- On en déduit :

$$f'(0) = \ln(1) = 0, \qquad f''(0) = 0, \qquad f^{(3)}(0) = \frac{2}{1} = 2$$

Enfin, $f(0) = \displaystyle\int_0^0 \ln\left(1 + t^2\right)\, dt = 0$.
(on peut aussi rappeler que f est la primitive qui s'annule au point 0 de $g : t \mapsto \ln\left(1 + t^2\right)$)

$$\boxed{f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(3)}(0) = 2}$$

Commentaire

- Dans l'exercice, il est fondamental d'écrire la formule de Taylor-Young jusqu'à l'ordre 3 puisque les dérivées successives de f en 0 sont nulles jusqu'à cet ordre : $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et $f^{(3)}(0) \neq 0$.
- Dans le programme ECE, il est clairement spécifié que la notion de développement limité n'est abordée que jusqu'à l'ordre 2. C'est pourquoi le concepteur donne l'expression de la formule à l'ordre 3.
- Il est simple de généraliser la formule de Taylor-Young à l'ordre n. Plus précisément, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage du point 0, alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

où $f^{(k)}$ représente la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f.

☐

c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0 (on trouve $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$).

Démonstration.
D'après la question précédente et par la formule de Taylor-Young rappelée dans l'énoncé :

$$f(x) \;=\; 2\,\frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \;=\; \frac{2}{6}\,x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3}\,x^3.}$$

☐

6. On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'unf', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$:

```
U = grand(1, 100 000, 'unf', 0, 1)
V = log(1 + U .^2)
f = -----
disp(f)
```

Démonstration.

- L'idée de la méthode de Monte-Carlo est de faire apparaître $f(1) = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt$ sous forme d'une espérance qu'on pourra alors approcher à l'aide d'une simulation informatique.
- On considère U une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ de densité : $f_U : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

  Notons alors V la v.a.r. définie par $V = g(U) = \ln(1+U^2)$.

  D'après le théorème de transfert, la v.a.r. V admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\, f_U(t)\,dt$ est absolument convergente.
  Les fonctions g et f_U étant à valeurs positives, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
  La fonction $t \mapsto g(t)\, f_U(t)$ étant de classe $\mathcal{C}^0_m$ sur le segment $[0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\, f_U(t)\,dt$ est bien définie.

  $$\boxed{\text{La v.a.r. } V \text{ admet une espérance.}}$$

- Enfin, par définition de f_U on obtient l'espérance de V sous la forme :

$$\mathbb{E}(V) \;=\; \int_0^1 g(t)\ f_U(t)\ dt \;=\; \int_0^1 \ln(1+t^2)\ dt \;=\; f(1)$$

- L'énoncé demande donc de déterminer une valeur approchée de $\mathbb{E}(V)$. L'idée naturelle pour obtenir une approximation de cette espérance est :
  × de simuler un grand nombre de fois ($N = 100000$ par exemple) la v.a.r. V.
  Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(v_1, \ldots, v_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(V_1, \ldots, V_N)$ de la v.a.r. V.
  (les v.a.r. V_i sont indépendantes et ont même loi que V)
  × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i \;\simeq\; \mathbb{E}(V)$$

- Cela se traduit de la manière suivante en **Scilab** :
  × la ligne 1 permet d'obtenir des valeurs $(u_1, \ldots, u_{100000})$ qui correspondent à l'observation d'un 100000-échantillon $(U_1, \ldots, U_{100000})$ de la v.a.r. U.
  × en ligne 2, on applique la fonction g à tous les éléments du 100000-uplet précédent, ce qui permet d'obtenir des valeurs $(v_1, \ldots, v_{100000})$ qui correspondent à l'observation d'un 100000-échantillon $(V_1, \ldots, V_{100000})$ de la v.a.r. V.
  × en ligne 3, il faut calculer la moyenne de ces observations.
  On complète donc cette ligne comme suit.

```
3  f = mean(V)
```

Commentaire

- Un tel niveau d'explication n'est pas attendu aux concours : l'écriture de la ligne manquante démontre la compréhension de toutes les commandes en question.
  On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Scilab**.
- On a utilisé en ligne 3 une fonction prédéfinie en **Scilab**. D'autres solutions sont possibles. Tout d'abord, on peut utiliser la fonction `sum` :

```
3  f = sum(V) / 100000
```

  On peut aussi effectuer la somme à l'aide d'une boucle :

```
3  S = 0
4  for i = 1:100000
5      S = S + V(i)
6  end
7  f = S / 100000
```

  Étant donné l'espace alloué par le programme (une ligne), le concepteur avait certainement en tête la première ou la deuxième solution. Cependant, il est raisonnable de penser que toute réponse juste sera comptée comme telle. Ainsi, la dernière solution rapporte certainement la totalité des points.

□

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt$.

7. a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

Démonstration.
Si $n = 0$ alors :

$$\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt \; = \; \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^0 \, dt \; = \; \int_0^1 1 \, dt \; = \; 1$$

La valeur donnée à u_0 est cohérente avec l'expression générale de u_n. On peut donc considérer, par la suite, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt$$

□

b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.

Démonstration.
Par définition :

$$u_1 \; = \; \int_0^1 \ln(1+t^2) \, dt \; = \; f(1)$$

$$\boxed{u_1 = f(1)}$$

□

8. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $t \in [0,1]$.

- Comme $t \in [0,1]$: $\quad 0 \leqslant t^2 \leqslant 1$ *(par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0,1]$)*

  ainsi : $\quad 1 \leqslant 1 + t^2 \leqslant 2$

  et : $\quad 0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2)$ *(par croissance de la fonction $\ln$ sur $]0,+\infty[$)*

- Rappelons alors : $\ln(2) \leqslant 1$.
  En effet, par stricte croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, cette inégalité équivaut à $2 \leqslant \mathrm{e}^1$.
  On a donc :

  $$\ln(1+t^2) \; \leqslant \; 1$$

  En multipliant de part et d'autre de cette inégalité par $\big(\ln(1+t^2)\big)^n \geqslant 0$, on obtient :

  $$\big(\ln(1+t^2)\big)^{n+1} \; \leqslant \; \big(\ln(1+t^2)\big)^n$$

- Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$:

  $$\underbrace{\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt}_{= u_n} \; \leqslant \; \underbrace{\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^{n+1} \, dt}_{= u_{n+1}}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc décroissante.

Commentaire

Il est possible d'adopter une présentation légèrement différente :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^{n+1} \, dt - \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt \\ &= \int_0^1 \Big(\big(\ln(1+t^2)\big)^{n+1} - \big(\ln(1+t^2)\big)^n\Big) \, dt \\ &= \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, \big(\ln(1+t^2)-1\big) \, dt \end{aligned}$$

On démontre alors : $\ln(1+t^2) - 1 \leqslant 0$ pour tout $t \in [0,1]$, d'où on en déduit :

$$\big(\ln(1+t^2)\big)^n \, \big(\ln(1+t^2)-1\big) \leqslant 0$$

par multiplication par $\big(\ln(1+t^2)\big)^n \geqslant 0$.
On conclut par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$. □

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Dans la question précédente, on a démontré, pour tout $t \in [0,1]$:

$$0 \leqslant \ln(1+t^2)$$

  Par croissance de la fonction élévation à la puissance n sur $[0,+\infty[$, on en déduit :

$$0 \leqslant \big(\ln(1+t^2)\big)^n$$

- Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$:

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_0^1 0 \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt \\ \| & & \| \\ 0 & & u_n \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par } 0.}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et minorée par } 0. \text{ Elle est donc convergente vers un réel } \ell \geqslant 0.}$$

□

9. a) Établir l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Dans la question ***8.a)***, on a démontré, pour tout $t \in [0,1]$:

$$0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2)$$

  Par croissance de la fonction élévation à la puissance n sur $[0,+\infty[$, on en déduit :

$$0 \leqslant \big(\ln(1+t^2)\big)^n \leqslant \big(\ln(2)\big)^n$$

- Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^1 0 \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(2)\big)^n \, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & u_n & & \big(\ln(2)\big)^n \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant u_n \leqslant \big(\ln(2)\big)^n.}$$

□

b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \big(\ln(2)\big)^n$$

- Or, la série $\sum \big(\ln(2)\big)^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\ln(2) \in [0,1[$ (comme on l'a démontré en question ***8.a)***).

Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente.
On en déduit alors que la suite (u_n) est convergente de limite nulle.

Commentaire

Si l'on suit l'ordre de la question, on doit d'abord déterminer la nature de la suite (u_n).
On utilise l'encadrement précédent et on remarque :

× $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\ln(2)\big)^n = 0$ car $\ln(2) \in [0,1[$.

Ainsi, par théorème d'encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite nulle.

□

10. a) Montrer que :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln(2)}$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Dans la question ***8.a)***, on a démontré, pour tout $t \in [0,1]$:

$$0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2)$$

donc :
$$0 \geqslant -\ln(1+t^2) \geqslant -\ln(2)$$

puis :
$$1 \geqslant 1-\ln(1+t^2) \geqslant 1-\ln(2)$$

et :
$$\frac{1}{1} \leqslant \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{1-\ln(2)}$$
(par croissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ avec $1-\ln(2) > 0$)

enfin :
$$\big(\ln(1+t^2)\big)^n \leqslant \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(2)}$$
(en multipliant de part et d'autre par $\big(\ln(1+t^2)\big)^n \geqslant 0$)

$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } t \in [0,1] : 0 \leqslant \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(2)}}$$

- Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_0^1 0 \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(2)} \, dt \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\
0 & & u_n & & \displaystyle\frac{1}{1-\ln(2)} \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt \ = \ \frac{u_n}{1-\ln(2)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : 0 \ \leqslant \ \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt \ \leqslant \ \frac{u_n}{1-\ln(2)}.}$$ □

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$.

Démonstration.
Remarquons :

× $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$.

× $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1-\ln(2)} = 0$ d'après la question ***9.b)***.

$$\boxed{\text{On en déduit, par théorème d'encadrement, que la suite } \left(\int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente, de limite nulle.}}$$ □

c) Justifier que, pour tout entier naturel n, non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \ = \ \int_0^1 \frac{1-\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition :

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^k \, dt & \\
& = & \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \big(\ln(1+t^2)\big)^k \, dt & \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\
& = & \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt & \textit{(car : } \forall t \in [0,1], \ \ln(1+t^2) \neq 1\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n-1} u_k \ = \ \int_0^1 \frac{1-\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt.}$$ □

d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\, dt$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente et par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\, dt - \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\, dt \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\, dt \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{10.b}\textit{))} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ est convergente et admet pour somme } \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\, dt.}$$

□

e) Modifier le script présenté à la question ***6)*** pour donner un valeur approchée de $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Démonstration.

- Comme en question ***6***, il s'agit d'utiliser la méthode de Monte-Carlo. L'idée est de faire apparaître $\int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\, dt$ sous forme d'une espérance qu'on pourra alors approcher à l'aide d'une simulation informatique.
- On considère U une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ de densité :

$$f_U : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  Notons alors W la v.a.r. définie par $W = h(U) = \frac{1}{1-\ln(1+U^2)}$ où la fonction h est définie par :

$$h : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{1}{1-\ln(1+t^2)} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

- D'après le théorème de transfert, la v.a.r. W admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^1 h(t)\ f_U(t)\, dt$ est absolument convergente.
  Les fonctions g et f_U étant à valeurs positives, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
  La fonction $t \mapsto h(t)\ f_U(t)$ étant de classe $\mathcal{C}_m^0$ sur $[0,1]$, l'intégrale $\int_0^1 h(t)\ f_U(t)\, dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } W \text{ admet une espérance.}}$$

- Enfin, par définition de f_U on obtient l'espérance de W sous la forme :

$$\mathbb{E}(W) \ = \ \int_0^1 \ h(t) \ f_U(t) \ dt$$

- On peut donc appliquer la méthode de Monte-Carlo. Il s'agit, comme on l'a vu en question ***6*** d'approcher la valeur de $\mathbb{E}(W)$ par la quantité :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} w_i$$

où $(w_1, \ldots, w_N)$ est un N-uplet d'observation du N-échantillon $(W_1, \ldots, W_N)$ de la v.a.r. W.

- En procédant comme en question ***6***, on obtient :

```
U = grand(1, 100 000, 'unf', 0, 1)
W = 1 / (1 - log(1 + U .^2) )
res = mean(W)
disp(res)
```

$\square$