
DS6 (version A) /155

Exercice 1 /39

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.

Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».

Pour tout entier naturel k non nul, on note F_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.

On considère la variable aléatoire X , égale au rang d'apparition du premier Pile et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier Face. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Face.

1. a) Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

• 1 pt : (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements + FPT

• 1 pt : pour tout $i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{3} \neq 0$

• 1 pt : $\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{1}{2}$

b) Montrer que : $\forall n \geq 2, \mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

• 1 pt : $[X = n] = F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n$

• 1 pt : (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements + FPT

• 1 pt : indépendance des événements F_1, F_2, \dots, F_{n-1} et P_n pour \mathbb{P}_{A_0}

• 1 pt : $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X = 0])$.

• 1 pt : $X(\Omega) = \{0\} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$ donc la famille $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements

• 1 pt : $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$

• 1 pt : reconnaissance d'une somme géométrique de raison $1/2$

• 1 pt : $\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{1}{3}$

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

• 1 pt : La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum n \mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente

• 1 pt : reconnaissance d'une série géométrique dérivée première de raison $1/2$

• 1 pt : $\mathbb{E}(X) = 1$

3. Montrer que $X(X - 1)$ possède une espérance.

En déduire que X possède une variance et vérifier que $\mathbb{V}(X) = \frac{4}{3}$.

- **1 pt** : La v.a.r. $X(X - 1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum n(n - 1) \mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente
- **1 pt** : reconnaissance d'une série géométrique dérivée seconde de raison $1/2$
- **1 pt** : $\mathbb{E}(X(X - 1)) = \frac{4}{3}$
- **1 pt** : $X^2 = X(X - 1) + X$ donc X^2 possède une espérance
- **1 pt** : $\mathbb{E}(X^2) = \frac{7}{3}$
- **1 pt** : $\mathbb{V}(X) = \frac{4}{3}$ par la formule de Kœnig-Huygens

4. Justifier que Y suit la même loi que X .

- **1 pt** : toute explication raisonnable sur la symétrie des rôles de Pile et Face

5. a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([Y = j])$.

- **1 pt** : $[X = 1] \cap [Y = j] = P_1 \cap \dots \cap P_{j-1} \cap F_j = [Y = j]$

b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = i])$.

- **1 pt** : $[X = i] \cap [Y = 1] = F_1 \cap \dots \cap F_{i-1} \cap P_i = [X = i]$

6. Loi de $X + Y$.

a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs positives sauf 0 et 2.

- **3 pts** : disjonction de cas bien menée

b) Montrer que $\mathbb{P}([X + Y = 1]) = \frac{2}{3}$.

- **1 pt** : $[X + Y = 1] = [X = 0] \cup [Y = 0]$
- **1 pt** : incompatibilité $[X = 0]$ et $[Y = 0]$
- **1 pt** : $\mathbb{P}([X + Y = 1]) = \frac{2}{3}$

c) Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$[X + Y = n] = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$

- **2 pts** : inclusion directe
- **1 pt** : inclusion réciproque

d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$\mathbb{P}([X + Y = n]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

- **1 pt** : incompatibilité des deux événements (0 pt si non sens à un moment donné)

7. Informatique.

On rappelle que, pour tout entier naturel m , l'instruction `grand(1, 1, 'uin', 0, m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).

On décide de coder Pile par 1 et Face par 0.

- a) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```

1  piece = grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
2  x = 1
3  if piece == 0 then
4      lancer == grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
5      while lancer == 0
6          lancer = ---
7          x = ---
8      end
9  else
10     if piece == 1 then
11         x = ---
12     end
13 end
14 disp(x)

```

• 1 pt :

• 1 pt :

• 1 pt :

• 1 pt :

• 1 pt :

- b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

• 1 pt : toute explication raisonnable

Exercice 2 /24

1. Montrer que, si f désigne un endomorphisme de \mathbb{R}^3 diagonalisable, alors l'endomorphisme f^2 est aussi diagonalisable (on rappelle : $f^2 = f \circ f$).

• 1 pt : si f est diagonalisable, alors il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale

• 1 pt : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^2$ est diagonale donc f^2 est diagonalisable

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fautive. Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. a) Déterminer la matrice A^2 puis établir : $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A .

• 1 pt : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

• 1 pt : le polynôme $P(X) = X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de A

• 1 pt : les valeurs propres possibles de A sont 1 et -1

b) Donner une base (u) de $\text{Ker}(g - \text{id})$.

• 1 pt : écriture système

• 1 pt : résolution système : $x = y = z$

• 1 pt : $\text{Ker}(g - \text{id}) = \text{Vect}((1, 1, 1))$

• 1 pt : $((1, 1, 1))$ est une base de $\text{Ker}(g - \text{id})$

c) Déterminer $\text{Ker}(g + \text{id})$.

• 1 pt : écriture système

• 1 pt : résolution système : $x = y = z = 0$

• 1 pt : $\text{Ker}(g + \text{id}) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

d) En déduire que g n'est pas diagonalisable.

• 1 pt : $\text{Sp}(g) = \text{Sp}(A) = \{1\}$

• 1 pt : $\dim(E_1(g)) = 1 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

3. a) Résoudre l'équation $A^2 X = -X$, d'inconnue le vecteur X élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base (v, w) de $\text{Ker}(g^2 + \text{id})$.

• 1 pt : résolution du système : $y = x + z$

• 1 pt : $\text{Ker}(g^2 + \text{id}) = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$

• 1 pt : $((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ est une base de $\text{Ker}(g^2 + \text{id})$

b) Montrer que la famille (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .

• 2 pts : (u, v, w) est libre

• 1 pt : $\text{Card}(((u, v, w))) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

c) Écrire la matrice de g^2 dans la base (u, v, w) et conclure.

• 1 pt : $g^2(u) = u$ donc $\text{Mat}_{(u,v,w)}(g^2(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• 1 pt : $g^2(v) = -v$ donc $\text{Mat}_{(u,v,w)}(g^2(v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• 1 pt : $g^2(w) = -w$ donc $\text{Mat}_{(u,v,w)}(g^2(w)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

• 0 pt : $\text{Mat}_{(u,v,w)}(g^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

• 1 pt : g^2 est diagonalisable. La réciproque de la question 1 est donc fausse.

Exercice 3 /35

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$. On a donc, en particulier : $u_0 = 1$.

1. Déterminer u_1 et u_2 .

- 1 pt : $t \mapsto (1-t^2)^n$ continue sur le segment $[0, 1]$, donc u_n bien défini
- 1 pt : $u_1 = \frac{2}{3}$
- 1 pt : $u_2 = \frac{8}{15}$

2. a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

- 1 pt : $u_{n+1} - u_n = - \int_0^1 t^2 (1-t^2)^n dt$
- 1 pt : $t^2 (1-t^2)^n \geq 0$ bien expliqué
- 1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq 1$)

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

- 1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq 1$) : $u_n \geq 0$
- 1 pt : (u_n) est décroissante et minorée par 0

3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n) .

a) On rappelle : $\forall \sigma > 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 1$.

En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$, puis celle de $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$.

- 1 pt : choix de $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ pour que $\frac{1}{2\sigma^2} = n$
- 1 pt : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$
- 1 pt : par parité et comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$ est convergente, $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$

b) Montrer que, pour tout réel t , on a : $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t^2} \geq 1 - t^2$.

- 1 pt : la fonction exp est convexe sur \mathbb{R}
- 1 pt : le graphe de la fonction exponentielle est au dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = 1 + x$
- 1 pt : $-t^2 \in \mathbb{R}$, on obtient donc l'inégalité souhaitée

c) En déduire : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$. Puis donner la limite de la suite (u_n) .

- 1 pt : $0 \leq (1-t^2)^n \leq e^{-nt^2}$
- 1 pt : les intégrales en présence sont convergentes
- 1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq 1$)
- 1 pt : $0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$
- 1 pt : par théorème d'encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

4. Calculer $\int_0^1 (1-t)^n dt$ puis montrer : $u_n \geq \frac{1}{n+1}$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne la série de terme général u_n ?

• 1 pt : $\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}$

• 1 pt : $1 \geq (1-t^2)^n \geq (1-t)^n$

• 1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq 1$)

• 1 pt : la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}$ est une série de Riemann d'exposant 1 donc diverge

• 1 pt : Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente

5. a) Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$$

• 1 pt : Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$

• 2 pts : $u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$

b) En déduire l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

• 1 pt : initialisation

• 2 pts : hérédité

c) On admet l'équivalent $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$. En écrivant $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$, montrer :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

• 1 pt : $4^n (n!)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\pi 4^n n^{2n+1} e^{-2n}$

• 1 pt : $(2n+1)(2n)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4\sqrt{\pi} \sqrt{n} 4^n n^{2n+1} e^{-2n}$

6. Informatique.

On admet que, si \mathbf{t} est un vecteur, la commande `prod(t)` renvoie le produit des éléments de \mathbf{t} .

Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher la valeur de u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```

1  n = input('entrez une valeur pour n : ')
2  x = 1:n
3  m = 2 * n + 1
4  y = 1:m
5  v = .....
6  w = .....
7  u = ..... * v^2 / w
8  disp(u)

```

• 1 pt : `5 v = prod(x)`

• 1 pt : `6 w = prod(y)`

• 1 pt : `7 u = (4 ^ n) * v ^ 2 / w`

Problème /57

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2) dt$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : étude de f

1. a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x .

- 1 pt : La fonction $g : t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur \mathbb{R}
- 1 pt : $g(t) \geq 0$
- 1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq x$)
- 1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x < 0$)

b) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$ pour tout réel x .

- 1 pt : g est continue sur \mathbb{R} , elle admet donc une primitive G de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}
- 1 pt : $f(x) = G(x) - G(0)$
- 1 pt : La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $f'(x) = \ln(1+x^2)$

c) En déduire les variations de f sur \mathbb{R} (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).

- 1 pt : $f'(x) = g(x) = \ln(1+x^2) \geq 0$
- 1 pt : f est strictement croissante sur \mathbb{R}

2. a) Montrer que f est impaire.

- 1 pt : On effectue le changement de variable $u = -t$, qui est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto -u$ est \mathcal{C}^1 sur le segment d'extrémités 0 et x
- 1 pt : $f(-x) = -f(x)$

b) Étudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

- 1 pt : la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}
- 1 pt : $f''(x) = \frac{1}{1+x^2} \times 2x$
- 1 pt : La fonction f est concave sur $] -\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$. La fonction f change de concavité en 0, seul point d'inflexion de la courbe représentative de f

3. a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

- 1 pt : $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$

b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x , on a :

$$f(x) = x (\ln(1+x^2) - 2) + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

- 1 pt : Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}
- 1 pt : Calcul bien présenté et détaillé

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est une intégrale convergente.

- **1 pt** : La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est impropre en $+\infty$
- **1 pt** : $f(t) = \frac{1}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$
- **1 pt** : $\forall t \in [1, +\infty[$, $\frac{1}{1+t^2} \geq 0$
- **1 pt** : L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$)
- **1 pt** : par critère de convergence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est convergente et donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ l'est aussi

b) En déduire que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \ln(1+x^2)$.

- **1 pt** : division par $x \ln(1+x^2) \neq 0$
- **1 pt** : l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est convergente donc $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$
- **1 pt** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(1+x^2)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln(1+x^2)} = 0$

c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln(1+x^2) = 2 \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x \ln(x)$$

- **1 pt** : $1+x^2 = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$
- **1 pt** : $1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{2 \ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

- **1 pt** : changement de variable $X = -x$
- **1 pt** : $\lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{f(X)}{2X \ln(-X)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x \ln(x)} = 1$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} 2x \ln(-x)$

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R} .

- **1 pt** : $f' = g$ et g est de classe \mathcal{C}^2

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f , c'est à dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$.

• **1 pt** : $f^{(3)}(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$ ($f'(x) = \ln(1+x^2)$, $f''(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ **déjà démontré dans les questions précédentes**)

• **1 pt** : $f(0) = \int_0^0 \ln(1+t^2) dt = 0$, $f'(0) = \ln(1) = 0$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = \frac{2}{1} = 2$

c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0 (on trouve $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$).

• **1 pt** : $f(x) = 2 \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) = \frac{1}{3} x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$

6. On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'unf', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$:

```

1 U = grand(1, 100 000, 'unf', 0, 1)
2 V = log(1 + U . ^2)
3 f = -----
4 disp(f)
    
```

• **1 pt** :

```

3 f = mean(V)
    
```

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt$.

7. a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

• **1 pt** : Si $n = 0$ alors : $\int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^0 dt = \int_0^1 1 dt = 1$

b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f .

• **1 pt** : $u_1 = \int_0^1 \ln(1+t^2) dt = f(1)$

8. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

• **1 pt** : $\ln(1+t^2) \leq 1$

• **1 pt** : $(\ln(1+t^2))^{n+1} \leq (\ln(1+t^2))^n$

• **1 pt** : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq 1$) : $u_{n+1} \leq u_n$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

• **1 pt** : $0 \leq (\ln(1+t^2))^n$

• **1 pt** : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq 1$) : $0 \leq u_n$

• **1 pt** : la suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$

9. a) Établir l'encadrement suivant :

$$0 \leq u_n \leq (\ln(2))^n$$

- 1 pt : $0 \leq (\ln(1+t^2))^n \leq (\ln(2))^n$
- 1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq 1$) : $0 \leq u_n \leq (\ln(2))^n$

b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

- 1 pt : la série $\sum (\ln(2))^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\ln(2) \in [0, 1[$
- 1 pt : par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente
- 1 pt : en particulier, (u_n) est convergente de limite nulle convergente

10. a) Montrer que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leq \frac{u_n}{1-\ln(2)}$$

- 2 pts : $0 \leq \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \leq \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(2)}$
- 1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq 1$)

b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} dt$.

- 1 pt : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{1-\ln(2)} = 0$ et théorème d'encadrement

c) Justifier que, pour tout entier naturel n , non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1 - (\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt$$

- 1 pt : linéarité de l'intégration
- 1 pt : somme géométrique de raison $q = \ln(1+t^2)$ avec $q \neq 1$

d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1 - \ln(1+t^2)} dt$$

- 1 pt : $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1 - \ln(1+t^2)} dt - \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt$
- 1 pt : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt = 0$ cf question 10.b)

e) Modifier le script présenté à la question 6) pour donner un valeur approchée de $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

- 2 pts :

```

1 U = grand(1, 100 000, 'unf', 0, 1)
2 W = 1 / (1 - log(1 + U . ^2) )
3 res = mean(W)
4 disp(res)

```