
DS6 (version A)

Exercice 1

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.

Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.

On considère la variable aléatoire X , égale au rang d'apparition du premier Pile et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier Face. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Face.

1. a) Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

b) Montrer que : $\forall n \geq 2, \mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X = 0])$.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que $X(X - 1)$ possède une espérance.

En déduire que X possède une variance et vérifier que $\mathbb{V}(X) = \frac{4}{3}$.

4. Justifier que Y suit la même loi que X .

5. a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([Y = j])$.

b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = i])$.

6. Loi de $X + Y$.

a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs positives sauf 0 et 2.

b) Montrer que $\mathbb{P}([X + Y = 1]) = \frac{2}{3}$.

c) Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$[X + Y = n] = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$

d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$\mathbb{P}([X + Y = n]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

7. Informatique.

On rappelle que, pour tout entier naturel m , l'instruction `grand(1, 1, 'uin', 0, m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).

On décide de coder Pile par 1 et Face par 0.

- a) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
1  piece = grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
2  x = 1
3  if piece == 0 then
4      lancer == grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
5      while lancer == 0
6          lancer = ---
7          x = ---
8      end
9  else
10     if piece == 1 then
11         x = ---
12     end
13 end
14 disp(x)
```

- b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Exercice 2

1. Montrer que, si f désigne un endomorphisme de \mathbb{R}^3 diagonalisable, alors l'endomorphisme f^2 est aussi diagonalisable (on rappelle : $f^2 = f \circ f$).

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse. Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. a) Déterminer la matrice A^2 puis établir : $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A .
- b) Donner une base (u) de $\text{Ker}(g - \text{id})$.
- c) Déterminer $\text{Ker}(g + \text{id})$.
- d) En déduire que g n'est pas diagonalisable.
3. a) Résoudre l'équation $A^2 X = -X$, d'inconnue le vecteur X élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base (v, w) de $\text{Ker}(g^2 + \text{id})$.
- b) Montrer que la famille (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .
- c) Écrire la matrice de g^2 dans la base (u, v, w) et conclure.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$. On a donc, en particulier : $u_0 = 1$.

1. Déterminer u_1 et u_2 .

2. a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n) .

a) On rappelle : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 1$.

En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$, puis celle de $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$.

b) Montrer que, pour tout réel t , on a : $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t^2} \geq 1 - t^2$.

c) En déduire : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$. Puis donner la limite de la suite (u_n) .

4. Calculer $\int_0^1 (1-t)^n dt$ puis montrer : $u_n \geq \frac{1}{n+1}$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne la série de terme général u_n ?

5. a) Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$$

b) En déduire l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

c) On admet l'équivalent $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$. En écrivant $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$, montrer :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

6. Informatique.

On admet que, si \mathbf{t} est un vecteur, la commande `prod(t)` renvoie le produit des éléments de \mathbf{t} .

Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher la valeur de u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```

1  n = input('entrez une valeur pour n : ')
2  x = 1:n
3  m = 2 * n + 1
4  y = 1:m
5  v = .....
6  w = .....
7  u = ..... * v^2 / w
8  disp(u)

```

Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2) dt$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : étude de f

1. **a)** Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x .
b) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
c) En déduire les variations de f sur \mathbb{R} (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).
2. **a)** Montrer que f est impaire.
b) Étudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. **a)** Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

- b)** En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x , on a :

$$f(x) = x (\ln(1+x^2) - 2) + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est une intégrale convergente.
b) En déduire que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \ln(1+x^2)$.
c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln(1+x^2) = 2 \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x \ln(x)$$

- d)** Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

- a)** Montrer que f est de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R} .

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f , c'est à dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

- b)** Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$.

- c)** En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0 (on trouve $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$).

6. On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'unf', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$:

```
1 U = grand(1, 100 000, 'unf', 0, 1)
2 V = log(1 + U . ^ 2)
3 f = -----
4 disp(f)
```

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt$.

7. a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f .

8. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

9. a) Établir l'encadrement suivant :

$$0 \leq u_n \leq (\ln(2))^n$$

b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

10. a) Montrer que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leq \frac{u_n}{1-\ln(2)}$$

b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} dt$.

c) Justifier que, pour tout entier naturel n , non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1 - (\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt$$

d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1 - \ln(1+t^2)} dt$$

e) Modifier le script présenté à la question 6) pour donner un valeur approchée de $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.