DS5 (version B)

Exercice (HEC 2005)

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.
On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et id l'application identité de E.
L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(*)$: $f \circ f = 4\,\mathrm{id}$.

A. Étude du cas $\mathbf{n = 2}$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = \left(\sqrt{2}-2,\ \sqrt{2}\right)$.

1. Montrer que f vérifie l'équation $(*)$, puis préciser le noyau et l'image de f.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$f \circ f = 4 \cdot \mathrm{id} \ \Leftrightarrow\ A \times A = 4 \cdot I_2$$
Or :
$$\begin{aligned} A \times A &= \left(\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \times \left(\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \cot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot I_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La deuxième proposition étant vérifiée, par équivalence, il en est de même de la première : } f \circ f = 4 \cdot \mathrm{id}.}$$

- Remarquons alors :
$$\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\right) = \sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = -2-2 = -4 \neq 0$$
Ainsi, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible, où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On en déduit que l'endomorphisme f est bijectif.
D'où f est injectif et ainsi : $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}}$$

- D'après le théorème du rang :
$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^2)}_{=2} = \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{=0} + \dim(\mathrm{Im}(f))$$
Ainsi : $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. On obtient :
  - × $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$
  - × $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2}$$

$\square$

Commentaire

- Dans la démonstration précédente, on fait preuve de recul pour ne pas avoir à déterminer, par calcul, $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. Procédant ainsi, on gagne du temps et donc des points. Cependant, il était possible (mais déconseillé !) de procéder à une démonstration calculatoire.
  Exposons cette solution.
  - Soit $w = \in \mathbb{R}^2$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $W = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} w \in \text{Ker}(f) & \Longleftrightarrow & f(w) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & A\,W = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right. \\ & \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ & - & 2y & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\ x = y = 0\right. \\ & & \textit{(par remontées successives)} \end{array}$$

  $\text{Ker}(f) = \{(x, y) \mid x = 0 \ \texttt{ET} \ y = 0\} = \{(0, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$
  - Déterminons maintenant $\text{Im}(f)$.
    On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$, $E_1 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1)$ et $E_2 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(e_2)$. Comme f est linéaire :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(f(e_1), f(e_2)\right)$$

    Or :
    - $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1)) = A\,E_1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
      Ainsi : $f(e_1) = \sqrt{2}\,e_1 + \sqrt{2}\,e_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
    - $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_2)) = A\,E_2 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$
      Ainsi : $f(e_2) = \sqrt{2}\,e_1 - \sqrt{2}\,e_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

    $\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(f(e_1), f(e_2)\right) = \text{Vect}\left((\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\right) = \text{Vect}\left((1, 1), (1, -1)\right)$
- Pour la détermination de $\text{Im}(f)$, on pouvait procéder plus rapidement, car les égalités :
  - $f(e_1) = \sqrt{2}\,e_1 + \sqrt{2}\,e_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$
  - $f(e_2) = \sqrt{2}\,e_1 + \sqrt{2}\,e_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

  peuvent être obtenues par simple lecture de la matrice A.
  En effet, par définition, cette matrice est la concaténation de $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1))$ et $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_2))$.

2. On note $F = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(f - 2\,\mathrm{id})$.

a) Montrer que G est engendré par le vecteur u.
En déduire la dimension de F et donner une base de F. On notera v le vecteur de cette base.

Démonstration.

- La famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Comme $f - 2 \cdot \mathrm{id}$ est linéaire :

$$G \;=\; \mathrm{Im}(f - 2 \cdot \mathrm{id}) \;=\; \mathrm{Vect}\,((f - 2 \cdot \mathrm{id})(e_1), (f - 2 \cdot \mathrm{id})(e_2))$$

De plus :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f - 2 \cdot \mathrm{id}) \;=\; A - 2\,I \;=\; \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

× $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((f - 2\,\mathrm{id})(e_1)\big) \;=\; (A - 2\,I_3)\,E_1 \;=\; \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

D'où : $(f - 2\mathrm{id})(e_1) = (\sqrt{2} - 2)\ e_1 + \sqrt{2}\ e_2 = (\sqrt{2} - 2, \sqrt{2}) = u$

× $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((f - 2\,\mathrm{id})(e_2)\big) \;=\; (A - 2\,I_3)\,E_2 \;=\; \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix}$.

D'où : $(f - 2\mathrm{id})(e_2) = \sqrt{2}\ e_1 - (\sqrt{2} + 2)\ e_2 = (\sqrt{2}, -(\sqrt{2} + 2)) = z$

$$\boxed{\text{Ainsi : } G = \mathrm{Vect}\,(u, z).}$$

- Démontrons que les vecteurs u et z sont colinéaires.

On remarque :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2}\ u \;=\; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2}\ (\sqrt{2} - 2, \sqrt{2}) \;=\; (\sqrt{2}, -(\sqrt{2} + 2)) \;=\; z$$

En effet :

× d'une part :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2}\ (\sqrt{2} - 2) \;=\; \sqrt{2}$$

× d'autre part :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2}\ \sqrt{2} \;=\; \frac{2}{\sqrt{2} - 2} \;=\; \frac{2\ (\sqrt{2} + 2)}{(\sqrt{2} - 2)\ (\sqrt{2} + 2)} \;=\; \frac{2\ (\sqrt{2} + 2)}{2 - 4} \;=\; -(\sqrt{2} + 2)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } G = \mathrm{Vect}\,(u, z) = \mathrm{Vect}\left(u, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2}\ u\right) = \mathrm{Vect}\,(u)}$$

- La famille (u) est donc :

× génératrice de G,

× libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

C'est donc une base de G.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(G) = \mathrm{Card}\,\big((u)\big) = 1.}$$

- Par le théorème du rang :

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\dim(\mathbb{R}^2)} \quad = \quad \dim(\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id})) \quad + \quad \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\dim(\mathrm{Im}(f-2\mathrm{id}))}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id})) = 1.}$$

- Soit $w \in \mathbb{R}^2$. Alors il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $W = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{cl}
 & w \in \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id}) \\[2mm]
\Longleftrightarrow & (f-2\mathrm{id})(w) = 0 \\[2mm]
\Longleftrightarrow & (A-2I)\ W = 0 \\[2mm]
\Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} (\sqrt{2}-2)\ x & + & \sqrt{2}\ y & = & 0 \\ \sqrt{2}\ x & - & (\sqrt{2}+2)\ y & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\ x & + & (2\ \sqrt{2}+2)\ y & = & 0 \\ \sqrt{2}\ x & - & (\sqrt{2}+2)\ y & = & 0 \end{array} \right. \\
 & \textit{(pour se débarrasser d'un } \sqrt{2}\textit{)} \\[2mm]
\underset{L_2 \leftarrow \sqrt{2}\ L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\ x & + & (2\ \sqrt{2}+2)\ y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
\Longleftrightarrow & \left\{ \ x = (\sqrt{2}+1)\ y \right.
\end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
F \ = \ \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id}) & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = (\sqrt{2}+1)\ y\} \\[2mm]
 & = & \{\big((\sqrt{2}+1)\ y, y\big) \mid y \in \mathbb{R}\} \\[2mm]
 & = & \{y \cdot (\sqrt{2}+1, 1) \mid y \in \mathbb{R}\} \\[2mm]
 & = & \mathrm{Vect}\ \big((\sqrt{2}+1, 1)\big)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } F = \mathrm{Vect}\ \big((\sqrt{2}+2, \sqrt{2})\big)}$$

Dans la suite, on note $v = (\sqrt{2}+2, \sqrt{2})$. □

Commentaire

- Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $F = \text{Ker}(f - 2\,\text{id}_{\mathcal{E}}) = E_2(f)$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Si $w \in \mathbb{R}^2$ et $W = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(w) \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ sont bien deux représentations différentes du même vecteur w, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{x \cdot e_1 + y \cdot e_2}_{\in \mathbb{R}^2} \ \cancel{=} \ \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\text{Vect}\left((\sqrt{2}+2, \sqrt{2})\right)}_{E_2(f)} \ \cancel{=} \ \underbrace{\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\right)}_{E_2(A)}$$

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I$.

  Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 2$.

  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $E_2(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A - 2\,I_3)\,X = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.

  Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, deux cas se présentent :

  × si $x = 0$ alors forcément $y = 0$ car sinon on crée un coefficient non nul en 1$^{\text{ère}}$ et 2$^{\text{ème}}$ position de la combinaison linéaire. On obtient :

$$E_2(A) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

  ce qui n'apporte aucune information.

  × si $x \neq 0$ alors forcément $x\,(\sqrt{2} - 2) + y\,\sqrt{2} = 0$. En prenant par exemple $x = \sqrt{2}$ on obtient : $y = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$. On vérifie de plus qu'on a bien : $\sqrt{2} \times \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})\,(-\sqrt{2} - 2) = 0$.
  Alors :

$$E_2(A) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}\right)$$

  Finalement : $E_2(A) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}\right)$.

  Et l'égalité est vérifiée pour des raisons de dimension puisqu'on a déjà démontré :
  $\dim\big(E_2(A)\big) = \dim\big(E_2(f)\big) = 1$.

b) Vérifier que G est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -2.

Démonstration.

- Déterminons $E_{-2}(f)$.
  Soit $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note $W = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w)$.

$$\begin{array}{rcl}
w \in E_{-2}(f) & \iff & (f + 2\,\mathrm{id})(w) = 0_{\mathbb{R}^2} \\[2mm]
& \iff & (A + 2\,I)\ W = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \iff & \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[4mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} (\sqrt{2}+2)\ x & + & \sqrt{2}\ y & = & 0 \\ \sqrt{2}\ x & + & (-\sqrt{2}+2)\ y & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\ x & + & (2\,\sqrt{2}-2)\ y & = & 0 \\ \sqrt{2}\ x & + & (-\sqrt{2}+2)\ y & = & 0 \end{array} \right. \\
& & \textit{(pour se débarrasser d'un } \sqrt{2}\textit{)} \\[4mm]
& \underset{L_2 \leftarrow \sqrt{2}\,L_2 - L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\ x & + & (2\,\sqrt{2}-2)\ y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
& \iff & \left\{ \ x = (1-\sqrt{2})\ y \right.
\end{array}$$

- On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-2}(f) & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = (1-\sqrt{2})\ y\} \\[2mm]
& = & \{((1-\sqrt{2})\ y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\[2mm]
& = & \{y \cdot (1-\sqrt{2}, 1) \mid y \in \mathbb{R}\} \\[2mm]
& = & \mathrm{Vect}\left((1-\sqrt{2}, 1)\right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } E_{-2}(f) = \mathrm{Vect}\left((\sqrt{2}-2, \sqrt{2})\right) = \mathrm{Vect}\,(u) = G}$$

Commentaire

On pouvait raisonner autrement.

- Dans un premier temps, on démontre : $G = \mathrm{Vect}\,(u) \subset E_{-2}(f)$.
  Pour ce faire, il suffit de démontrer : $u \in E_{-2}(f)$). Or :

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_{-2}(f) & \Leftrightarrow & (f + 2\ \mathrm{id})(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \\[2mm]
& \Leftrightarrow & (A + 2\ I)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

  Cette dernière égalité est bien vérifiée car :
  - × $(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2) + \sqrt{2}\ \sqrt{2} = 2 - 4 + 2 = 0$
  - × $\sqrt{2}\ (\sqrt{2}-2) + (-\sqrt{2}+2)\ \sqrt{2} = 2 - 2\ \sqrt{2} - 2 + 2\ \sqrt{2} = 0$

  On en déduit : $u \in E_{-2}(f)$. D'où : $G = \mathrm{Vect}\,(u) \subset E_{-2}(f)$.

Commentaire

- Pour conclure sur l'égalité de ces deux espaces vectoriels, il suffit de démontrer qu'ils sont de même dimension.

  On procède par l'absurde.
  Supposons : $\dim(E_{-2}(f)) = 2$.
  Comme $E_{-2}(f) \subset \mathbb{R}^2$, on en conclut : $E_{-2}(f) = \mathbb{R}^2$.
  Ainsi : $\forall w \in \mathbb{R}^2,\ (f + 2\text{id})(w) = 0_{\mathbb{R}^2}$. Autrement dit : $f + 2\ \text{id} = 0_{\mathbb{R}^2}$ ou encore $f = -2\ \text{id}$.
  Absurde ! En effet : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A \neq -2\ I$.
  Ainsi, $\dim(E_{-2}(f)) = 1$.
  (on note que $\dim(E_{-2}(f)) = 0$ est exclu puisque $E_{-2}(f) \supset \text{Vect}\,(u)$).

- On retiendra en particulier (c'est une propriété importante !) que si $g \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension n :

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(g)) = n \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Ker}(g) = E \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in E,\ g(x) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \quad g = 0_{\mathscr{L}(E)} \end{aligned}$$

□

3. a) Justifier que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $E_{-2}(f) = \text{Vect}\,(u)$ et $u \neq 0_{\mathbb{R}^2}$.
  On en déduit que u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2.
- D'après la question ***2.a)***, v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2.
- Les vecteurs u et v sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. On en déduit que la famille $\mathcal{F} = (u, v)$ est libre. Ainsi, la famille $\mathcal{F}$:
  × est libre,
  × vérifie : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } (u, v) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.}$$

Commentaire

- Il faut savoir lire les questions de l'énoncé. Il est ici demandé de « Justifier » que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$. On introduit donc une nuance par rapport à question classique qui commencerait par « Démontrer ». Lorsque le terme « justifier » apparaît dans une question c'est :
  × soit que l'on s'attend à une justification en français d'une propriété mathématique (*Justifier que les v.a.r. sont indépendantes*),
  × soit que l'on s'attend à ce que le candidat cite un théorème permettant de ne pas avoir à mener une démonstration plus lourde. C'est le cas ici.
- Évidemment, il était aussi possible de démontrer que la famille (u, v) était libre en repassant à la définition. Mais, comme expliqué dans cette remarque, ce n'est pas l'esprit de l'énoncé.

□

b) Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

Démonstration.

- On sait que :
  - × l'endomorphisme f possède deux valeurs propres distinctes (-2 et 2),
  - × $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est diagonalisable.}}$$

- Par ailleurs, la famille $\mathscr{B}' = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est alors :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

  En effet :
  - × $u = (\sqrt{2}-2, \sqrt{2}) = (\sqrt{2}-2)\ e_1 + \sqrt{2}\ e_2$,
  - × $v = (\sqrt{2}+2, \sqrt{2}) = (\sqrt{2}+2)\ e_1 + \sqrt{2}\ e_2$.

$$\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

Commentaire

Dans la base $\mathscr{B}' = (u, v)$, la matrice représentative de f est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ceci n'est qu'une réécriture différente du fait que : $f(u) = -2\ u$ et $f(v) = 2\ v$.

□

B. Étude du cas général

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation $(*)$.

4. a) Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f.

Démonstration.

- Tout d'abord, l'application f est un endomorphisme de E.
- L'endomorphisme f vérifie $(*)$. On en déduit :

$$\begin{array}{rrcl} & f \circ f & = & 4\,\mathrm{id} \\ \text{donc} & \left(\dfrac{1}{4}\ f\right) \circ f & = & \mathrm{id} \end{array}$$

  Comme E est de dimension finie, on en déduit que f est bijective de réciproque $\dfrac{1}{4}\ f$.

$$\boxed{\text{Finalement } f \text{ est un automorphisme et } f^{-1} = \frac{1}{4}\ f.}$$

□

b) Déterminer les valeurs propres possibles de f.

Démonstration.
L'application f vérifie $(*)$. Ainsi : $f^2 - 4\,\text{id} = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
On en déduit que le polynôme $Q(X) = X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$ est un polynôme annulateur de f. Ainsi :

$$\text{Sp}(f) \ \subset \ \{\text{racines de } P\ \} = \{-2, 2\}$$

$$\boxed{\text{Les réels } -2 \text{ et } 2 \text{ sont les deux seules valeurs propres possibles de l'endomorphisme } f.}$$

Commentaire

- Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, où $\dim(E) = n$, possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de f alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de A puisque :

  $$(\alpha\, Q)(f) \ = \ \alpha\, Q(f) \ = \ 0_{\mathscr{L}(E)}$$

  Cela suffit à démontrer que f possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)Q(X)$ est un polynôme annulateur de f puisque :

  $$R(f) \ = \ (f - 5\,\text{id})\, Q(f) \ = \ 0_{\mathscr{L}(E)}$$

  Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'un endomorphisme.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de f. Si c'était le cas, f aurait une infinité de valeurs propres (il en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

□

c) Vérifier que $2\,\text{id}$ et $-2\,\text{id}$ satisfont l'équation $(*)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

  $$(2\ \text{id}) \circ (2\ \text{id}) = 4\ \text{id}^2 = 4\ \text{id}$$

- Ensuite :

  $$(-2\ \text{id}) \circ (-2\ \text{id}) = 4\ \text{id}^2 = 4\ \text{id}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que les endomorphismes } -2\ \text{id et } 2\ \text{id satisfont } (*).}$$

□

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\,\text{id}$ et $f \neq -2\,\text{id}$ et on note $F = \text{Ker}(f - 2\ \text{id})$ et $G = \text{Im}(f - 2\ \text{id})$.

5. Soit x un élément de E. Montrer que $(f(x) - 2x) \in \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id})$ et que $(f(x) + 2x) \in F$.
En déduire que $G \subset \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{id})$ et que $\mathrm{Im}\,(f + 2\,\mathrm{id}) \subset F$.
Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f.

Démonstration.

- Démontrons : $(f(x) - 2x) \in \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id})$.

$$\begin{aligned}(f + 2\ \mathrm{id})(f(x) - 2x) &= f(f(x) - 2x) + 2\ \mathrm{id}(f(x) - 2x) \\ &= (f \circ f)(x) - 2\ \cancel{f(x)} + 2\ (\cancel{f(x)} - 2x) && \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ &= (4\ \mathrm{id})(x) - 4x && \textit{(car } f \circ f = 4\ \mathrm{id}\textit{)} \\ &= 4x - 4x = 0_E\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } (f(x) - 2x) \in \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id}).}$$

- Démontrons : $(f(x) + 2x) \in \mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{id})$.

$$\begin{aligned}(f - 2\ \mathrm{id})(f(x) + 2x) &= f(f(x) + 2x) - 2\ \mathrm{id}(f(x) + 2x) \\ &= (f \circ f)(x) + 2\ \cancel{f(x)} - 2\ (\cancel{f(x)} + 2x) && \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ &= (4\ \mathrm{id})(x) - 4x && \textit{(car } f \circ f = 4\ \mathrm{id}\textit{)} \\ &= 4x - 4x = 0_E\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } (f(x) + 2x) \in \mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{id}).}$$

- Démontrons maintenant : $G = \mathrm{Im}(f - 2\ \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id})$.

  Soit $y \in \mathrm{Im}(f - 2\ \mathrm{id})$.
  ALors il existe $x \in E$ tel que : $y = (f - 2\ \mathrm{id})(x) = f(x) - 2x$.
  D'après ce qui précède, $y \in \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id})$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } G \subset \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id}).}$$

- Démontrons : $\mathrm{Im}(f + 2\ \mathrm{id}) \subset F = \mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{id})$.

  Soit $y \in \mathrm{Im}(f + 2\ \mathrm{id})$.
  Alors il existe $x \in E$ tel que : $y = (f + 2\ \mathrm{id})(x) = f(x) + 2x$.
  D'après ce qui précède, $y \in \mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{id})$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Im}(f + 2\ \mathrm{id}) \subset F\,?}$$

Commentaire

- Insistons sur la facilité de ces deux dernières démonstration. Il s'agit essentiellement de mettre en place la structure de démonstration et de dérouler les définitions.
- Précisons la manière d'agir.

1 Soit $y \in \mathrm{Im}(f + 2\,\mathrm{id})$.
2 Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = (f + 2\,\mathrm{id})(x)$. Alors :
3 $\dots$
4 Ainsi, $y \in \mathrm{Ker}(f)$.

  × Les lignes 1 et 6 correspondent à la mise en place de la structure de démonstration : il s'agit de démontrer une inclusion. On choisit donc un élément dans $\mathrm{Im}(f + 2\,\mathrm{id})$ et on démontre qu'il est dans F.

  × La ligne 2 correspond au déroulé de la définition de l'image d'une application.
  Dire : $y \in \mathrm{Im}(f + 2\,\mathrm{id})$ c'est exactement dire que y s'écrit sous la forme $(f + 2\,\mathrm{id})(x)$ pour un $x \in E$.

  C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler et que l'on s'intéresse aux hypothèses (ici, le fait que l'on ait : $y = f(x) + 2\,x$).

- Le message est clair : sur les 4 lignes de rédaction, 3 proviennent de la présentation et seule 1 correspond à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration).

- Pour démontrer que -2 est valeur propre de f, on va démontrer : $\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{id}) \neq \{0_E\}$.

  On procède par l'absurde.
  Supposons : $\mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id}) = \{0_E\}$.
  D'après ce qui précède : $\mathrm{Im}(f - 2\ \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id}) = \{0_E\}$. On en déduit : $\mathrm{Im}(f - 2\ \mathrm{id}) = \{0_E\}$.
  Or, par le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(\mathbb{R}^n) & = & \dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})) & + & \dim(\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{id})) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ n & & & & 0 \end{array}$$

  Ainsi : $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})) = n$. Alors :
  × $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}) \subset \mathbb{R}^n$,
  × $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$
  On en conclut : $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}) = \mathbb{R}^n$.
  Ceci démontre : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (f - 2\,\mathrm{id})(x) = 0_E$. Alors : $f - 2\,\mathrm{id} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. D'où : $f = 2$ id.
  Absurde ! En effet, par hypothèse de l'énoncé : $f \neq 2$ id.

  $\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id}) \neq \{0_E\}. \text{ Ce qui démontre que } -2 \text{ est valeur propre de } f.}$

- Démontrons que 2 est valeur propre de f.
  En procédant par l'absurde de manière similaire au point précédent, on obtient :

$$\mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{id}) \neq \{0_E\}$$

  (Absurde ! En effet : $f = -2$ id).

  $\boxed{\text{Ainsi, 2 est valeur propre de } f.}$

□

6. Soit x un vecteur de $\text{Ker}(f + 2\text{ id})$.

a) Exprimer $(f - 2\text{ id})(x)$ en fonction de x uniquement.
En déduire que x appartient à G, puis : $G = \text{Ker}(f + 2\,\text{id})$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $(f - 2\text{ id})(x) = f(x) - 2\text{ id}(x) = f(x) - 2x$.
- De plus $x \in \text{Ker}(f + 2\text{ id})$. Alors : $(f + 2\text{ id})(x) = 0_E$. On en déduit :

$$f(x) + 2x = 0_E \quad \text{d'où} \quad f(x) = -2\,x$$

$$\boxed{\text{On obtient : } (f - 2\text{ id})(x) = f(x) - 2x = -2x - 2x = -4x.}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{4}\,(f - 2\text{ id})(x) \\ &= (f - 2\text{ id})\left(-\frac{1}{4}\,x\right) \quad \textit{(par linéarité de } f - 2\,\text{id}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } x \in \text{Im}(f - 2\text{ id}).}$$

- On vient de démontrer que tout élément x de $\text{Ker}(f + 2\text{ id})$ est élément de $\text{Im}(f - 2\text{ id})$.
Autrement dit : $\text{Ker}(f + 2\text{ id}) \subset \text{Im}(f - 2\text{ id})$.
De plus, d'après la question ***5.*** : $\text{Im}(f - 2\text{ id}) \subset \text{Ker}(f + 2\text{ id})$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \text{Im}(f - 2\text{ id}) = \text{Ker}(f + 2\text{ id})}$$

□

b) Montrer que f est diagonalisable.

Démonstration.

- D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\text{Ker}(f - 2\text{id})) + \underbrace{\dim(\text{Im}(f - 2\text{id}))}_{= \dim(\text{Ker}(f + 2\text{id}))} \quad \textit{(d'après la question précédente)}$$

- D'après la question ***5.***, on sait que -2 et 2 sont valeurs propres de f. Ce sont les seules valeurs propres d'après la question ***4.b)***. On vient de démontrer que :

$$\dim(E_2(f)) + \dim(E_{-2}(f)) = \dim(\mathbb{R}^n)$$

$$\boxed{\text{Ceci démontre que } f \text{ est diagonalisable.}}$$

□

Problème (ESSEC II 2020)

Lorsque l'on effectue des sondages, de nombreux biais statistiques peuvent apparaître : on peut par exemple avoir considéré un échantillon non-représentatif de la population, il peut y avoir un biais dans les réponses des personnes sondées... On va s'intéresser dans ce problème à ce que l'on appelle le biais par la taille : il provient du fait que si l'on choisit une personne au hasard dans la population, celle-ci a plus de chances de faire partie d'une catégorie nombreuse de la population.
Le biais par la taille est la source de nombreux « paradoxes » probabilistes, comme le fait que les gagnants du loto vivent en moyenne plus longtemps (parce que les gagnants sont ceux qui ont pu jouer au loto plus longtemps) ou le fait que vos amis ont en moyenne plus d'amis que vous (car les gens qui ont un très grand nombre d'amis font sûrement partie de vos amis). On verra ici comment formaliser le biais par la taille, et l'utiliser dans différents contextes.
Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire X, on notera $\mathbb{E}(X)$ son espérance (resp. $\mathbb{V}(X)$ sa variance) lorsqu'elles existent.

Première partie : Biais par la taille, exemples discrets

1. On suppose que le nombre d'enfants dans une famille française est une variable aléatoire X. Pour connaître la loi de X, une idée serait d'interroger les élèves d'une école pour connaître le nombre d'enfants dans leur famille.
On va voir que cette approche introduit un biais, en considérant une situation particulière. Supposons que X suive la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{5}$. On note $p_k = \mathbb{P}(\,[X = k]\,)$ pour $k \in \{0, 1, \dots, 10\}$.

a) (i) Rappeler l'expression de p_k pour $k \in \{0, 1, \dots, 10\}$.

Démonstration.

$$\boxed{\forall k \in [\![0, 10]\!],\ p_k = \mathbb{P}([X = k]) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{10-k}}$$

□

(ii) Que vaut $\mathbb{E}(X)$?

Démonstration.

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \ = \ 10\ \frac{1}{5} \ = \ 2}$$

□

(iii) Donner $\mathbb{V}(X)$, et en déduire $\mathbb{E}(X^2)$.

Démonstration.

$$\boxed{\mathbb{V}(X) \ = \ 10\ \frac{1}{5}\ \frac{4}{5} \ = \ \frac{8}{5}}$$

De plus, par formule de Koenig-Huygens : $\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$. D'où :

$$\mathbb{E}(X^2) \ = \ \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \ = \ \frac{8}{5} + 2^2 \ = \ \frac{8}{5} + 4$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(X^2) = \frac{28}{5}.}$$

□

b) Soit M_k le nombre de familles à k enfants, $M = \sum\limits_{k=0}^{10} M_k$ le nombre total de familles (donc $p_k = \dfrac{M_k}{M}$). Soit N_k le nombre total d'enfants (c'est-à-dire dans toute la population) qui font partie d'une famille à k enfants, et $N = \sum\limits_{k=0}^{10} N_k$ le nombre total d'enfants de la population.

Commentaire

- L'énoncé se permet ici une confusion entre probabilité et proportion. Rappelons la différence entre ces deux termes.
  - × Une probabilité est une valeur **théorique**. Elle provient de la modélisation d'une expérience. Ici, on modélise le nombre d'enfants dans une famille française par une v.a.r. X de loi $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{5}\right)$.
  - × Une proportion est une valeur **empirique**. C'est une fréquence obtenue à l'aide d'observations réelles. Ici :
  $$\frac{M_k}{M} = \frac{\text{nombre de familles à } k \text{ enfants}}{\text{nombre total de familles}}$$
- Il est cependant naturel d'approcher $p_k = \mathbb{P}([X = k])$ par $\dfrac{M_k}{M}$. Pour cela l'idée est :
  - × de simuler un grand nombre de fois (M est ce grand nombre) la v.a.r. X. Formellement, on souhaite obtenir un M-uplet $(x_1, \dots, x_M)$ qui correspond à l'observation d'un M-échantillon $(X_1, \dots, X_M)$ de la v.a.r. X.
  - × de compter le nombre de fois où $x_i = k$.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :
  $$\frac{M_k}{M} = \frac{\text{nombre de fois où } x_i = k}{\text{taille } (N) \text{ de l'observation}} \approx \mathbb{P}([X = k]) = p_k$$

(i) Démontrer : $N_k = k\, p_k\, M$.

Démonstration.
Il y a M_k familles de k enfants. On en déduit que le nombre d'enfants qui font partie d'une famille à k enfants est :
$$N_k = k\, M_k$$

$$\boxed{\text{Or } p_k = \frac{M_k}{M}. \text{ D'où : } N_k = k\, p_k\, M.}$$ □

(ii) Démontrer : $\dfrac{N}{M} = 2$.

Démonstration.
On calcule :
$$\begin{aligned} \frac{N}{M} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{10} N_k &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{10} k\, p_k\, M && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{1}{\cancel{M}}\, \cancel{M} \sum_{k=0}^{10} k\, p_k \\ &= \sum_{k=0}^{10} k\, \mathbb{P}([X = k]) && \textit{(par définition de } p_k\textit{)} \\ &= \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{\textit{1.a)(i)}}, \text{ on obtient : } \frac{N}{M} = 2.}$$ □

(iii) Montrer que la proportion des enfants provenant d'une famille à k enfants est : $p_k^* = \dfrac{k\,p_k}{2}$.

Démonstration.
La proportion d'enfants provenant d'une famille à k enfants est :

$$p_k^* \ = \ \frac{\text{nombre d'enfants qui font partie d'une famille à } k \text{ enfants}}{\text{nombre total d'enfants}} \ = \ \frac{N_k}{N} \ = \ \frac{\frac{N_k}{M}}{\frac{N}{M}}$$

D'après les questions ***1.b)(i)*** et ***1.b)(ii)***, on obtient :

$$p_k^* \ = \ \frac{\frac{k\,p_k\,\cancel{M}}{\cancel{M}}}{2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_k^* = \frac{k\,p_k}{2}.}$$

□

c) On choisit une personne au hasard dans la rue, à qui l'on demande combien d'enfants ses parents ont eu (lui ou elle inclus). On note Y ce nombre d'enfants.

(i) Pour tout entier k élément de $\{1, 2, \dots, 10\}$, démontrer : $\mathbb{P}(\,[Y = k]\,) = \dfrac{k\,p_k}{2}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, 10]\!]$.
L'événement $[Y = k]$ est réalisé si et seulement si la personne interrogée fait partie d'une fratrie de k enfants.
En confondant proportion et probabilité (cf remarque faite en question ***1.b)***), on obtient :

$$\mathbb{P}([Y = k]) \ = \ p_k^*$$

$$\boxed{\text{D'après la question précédente, on en déduit : } \forall k \in [\![1, 10]\!],\ \mathbb{P}([Y = k]) = \frac{k\,p_k}{2}.}$$

□

(ii) Démontrer : $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{\mathbb{E}(X^2)}{\mathbb{E}(X)}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition de la v.a.r. Y : $Y(\Omega) \subset [\![1, 10]\!]$. En effet, une personne donnée fait forcément partie d'une fratrie d'au moins 1 enfant.
  La v.a.r. Y admet alors une espérance, car c'est une v.a.r. finie.
- Par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) \ &= \ \sum_{k=1}^{10} k\,\mathbb{P}([Y = k]) \\
&= \ \sum_{k=1}^{10} k\ \frac{k\,p_k}{2} && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} k^2\,\mathbb{P}([X = k]) \\
&= \ \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(X^2) && \textit{(par définition du moment d'ordre 2)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la question } \textbf{\textit{1.a)(ii)}} : \mathbb{E}(Y) = \frac{\mathbb{E}(X^2)}{\mathbb{E}(X)}.}$$

□

(iii) En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et le comparer à $\mathbb{E}(X)$.

Démonstration.

- D'après les questions ***1.a)(i)*** et ***1.a)(ii)*** :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\mathbb{E}(X^2)}{\mathbb{E}(X)} = \frac{\frac{28}{5}}{2} = \frac{1}{2}\frac{28}{5} = \frac{14}{5}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{14}{5}}$$

- On remarque :

$$\underset{\mathbb{E}(Y)}{\underset{\shortparallel}{\frac{14}{5}}} \geqslant \frac{10}{5} = \underset{\mathbb{E}(X)}{\underset{\shortparallel}{2}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(Y) \geqslant \mathbb{E}(X).}$$

□

Commentaire

L'énoncé nous a présenté dans cette question ***1.*** un exemple de biais par la taille. En effet :

- on cherche à connaître la loi de X, nombre d'enfants dans une famille française,
- on interroge pour cela des enfants en leur demandant la taille de leur fratrie. On modélise cette taille par une v.a.r. Y.

Dans cette expérience, l'échantillon considéré n'est pas représentatif des familles françaises. En effet, en demandant aux enfants la taille de leur fratrie, il est impossible de prendre en compte les familles sans enfant. On a d'ailleurs précisé dans les questions précédentes : $X(\Omega) = [\![0, 10]\!]$ mais $Y(\Omega) \subset [\![1, 10]\!]$).

C'est cette non-représentativité qui induit un biais dans l'étude de la loi de X.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, non identiquement nulle et admettant une espérance.

Pour tout entier $i > 0$, on pose : $q_i = \dfrac{i}{\mathbb{E}(X)}\, \mathbb{P}(\,[X = i]\,)$.

Commentaire

- Remarquons que l'hypothèse émise par l'énoncé « la v.a.r. X est non identiquement nulle » ne suffit pas pour que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, le réel q_i soit bien défini, *i.e.* $\mathbb{E}(X) \neq 0$. En effet, si on définit une v.a.r. X par :

$$X(\Omega) = \{0, 1\}, \qquad \mathbb{P}([X = 0]) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X = 1]) = 0$$

Cette variable aléatoire :

× est à valeurs dans $\mathbb{N}$ (car $\{0, 1\} \subset \mathbb{N}$), n'est pas identiquement nulle car $1 \in X(\Omega)$,

× admet une espérance car c'est une v.a.r. finie et :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}([X = 0]) + 1 \times \mathbb{P}([X = 1]) = 0$$

- La bonne hypothèse est la suivante : « la v.a.r. X n'est pas nulle presque sûrement » (*i.e.* $\mathbb{P}([X = 0]) < 1$). Dans ce cas :

× comme X est une v.a.r. à valeurs positives ($X(\Omega) \subset \mathbb{N}$), alors, par positivité de l'espérance : $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

× Démontrons par l'absurde : $\mathbb{E}(X) > 0$.
Supposons : $\mathbb{E}(X) \leqslant 0$. D'après le point précédent, on en déduit : $\mathbb{E}(X) = 0$.
De plus la v.a.r. X est à valeurs positives. On en conclut que X est nulle presque sûrement ($\mathbb{P}([X = 0]) = 1$). Absurde !

On obtient bien : $\mathbb{E}(X) > 0$. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, q_i est bien défini.

a) Calculer $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} q_i$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{\mathbb{E}(X)}\,\mathbb{P}([X=i]) \;=\; \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \sum_{i=1}^{n} i\,\mathbb{P}([X=i])$$

- De plus, la v.a.r. X admet une espérance. On en déduit que la série $\sum\limits_{i\geqslant 1} i\,\mathbb{P}([X=i])$ est absolument convergente, donc convergente. Ainsi la série $\sum\limits_{i\geqslant 1} q_i$ est convergente et :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} q_i \;=\; \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \sum_{i=1}^{+\infty} i\,\mathbb{P}([X=i]) \;=\; \frac{1}{\mathbb{E}(X)}\,\mathbb{E}(X) \;=\; 1$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{+\infty} q_i = 1}$$

□

La suite $(q_i)_{i>0}$ définie ci-dessus définit donc bien une loi de probabilité.

Commentaire

Rappelons que pour définir une loi de probabilité, la suite $(q_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ doit vérifier :
1) $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $q_i \geqslant 0$,
2) $\sum\limits_{i\geqslant 1} q_i$ est convergente et sa somme vaut 1.
Le point ***2)*** a été démontré en question précédente. Justifions le point ***1)***. Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

- Comme $\mathbb{P}$ est une application probabilité : $\mathbb{P}([X=i]) \geqslant 0$.
- De plus la v.a.r. X est à valeurs positives ($X(\Omega) \subset \mathbb{N}$). Par positivité de l'espérance : $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

Enfin : $i \geqslant 0$. D'où : $q_i \geqslant 0$.

On considère la variable aléatoire X^* dont la loi est donnée par les q_i, c'est-à-dire, pour tout i entier naturel non nul :

$$\mathbb{P}(\,[X^* = i]\,) \;=\; \frac{i}{\mathbb{E}(X)}\,\mathbb{P}(\,[X=i]\,)$$

On dit que X^* suit *la loi de X biaisée par la taille.*

b) On suppose que X admet un moment d'ordre 2. Démontrer : $\mathbb{E}(X^*) = \dfrac{\mathbb{E}(X^2)}{\mathbb{E}(X)}$

Démonstration.

- La v.a.r. X^* admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{i\geqslant 1} i\,\mathbb{P}([X^*=i])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=0}^{n} i\,\mathbb{P}([X^*=i]) \;=\; \sum_{i=0}^{n} i\,\frac{i}{\mathbb{E}(X)}\,\mathbb{P}([X=i]) \;=\; \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \sum_{i=0}^{n} i^2\,\mathbb{P}([X=i])$$

- La v.a.r. X admet un moment d'ordre 2. On en déduit que la série $\sum\limits_{i \geqslant 0} i^2\, \mathbb{P}([X = i])$ est absolument convergente, et donc convergente. Ainsi, la v.a.r. X^* admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X^*) \;=\; \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \sum_{i=0}^{+\infty} i^2\, \mathbb{P}([X = i]) \;=\; \frac{\mathbb{E}(X^2)}{\mathbb{E}(X)}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^*) = \frac{\mathbb{E}(X^2)}{\mathbb{E}(X)}}$$

□

c) En déduire que si $\mathbb{E}(X^2)$ existe, on a : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X)\,\big(\mathbb{E}(X^*) - \mathbb{E}(X)\big)$.

Démonstration.
Supposons que la v.a.r. X admet un moment d'ordre 2. Alors X admet une variance. De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(X) & = & \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 & \textit{(par formule de Koenig-Huygens)} \\ & = & \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(X^*) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 & \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Si } \mathbb{E}(X^2) \text{ existe, alors : } \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X)\,\big(\mathbb{E}(X^*) - \mathbb{E}(X)\big).}$$

□

d) Conclure : $\mathbb{E}(X^*) \geqslant \mathbb{E}(X)$.

Démonstration.
Supposons que X admet un moment d'ordre 2. Alors :

- les v.a.r. X et X^* admettent une espérance (d'après ***2.b)***).
- d'après ***2.c)*** :
$$\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{E}(X)\,\big(\mathbb{E}(X^*) - \mathbb{E}(X)\big)$$
Or une variance est toujours positive. D'où : $\mathbb{E}(X)\,\big(\mathbb{E}(X^*) - \mathbb{E}(X)\big) \geqslant 0$.
- Comme la v.a.r. X est à valeurs positives, par positivité de l'espérance : $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
De plus : $\mathbb{E}(X) \neq 0$ (démontré dans la remarque en début de question ***2.***).
Ainsi : $\mathbb{E}(X) > 0$. On en déduit :

$$\mathbb{E}(X^*) - \mathbb{E}(X) \;\geqslant\; 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}(X^*) \geqslant \mathbb{E}(X).}$$

□

3. a) Soit λ un réel strictement positif. On suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. Soit X^* une variable aléatoire suivant la loi de X biaisée par la taille.

(i) Donner la loi de X^*.

Démonstration.

- En utilisant la définition de X^*, on considère dans la suite : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

- Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X^* = i]) & = & \dfrac{i}{\mathbb{E}(X)}\, \mathbb{P}([X = i]) & \textit{(par définition de } X^*\textit{)} \\ & = & \dfrac{i}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\lambda}\, \dfrac{\lambda^i}{i!} & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Finalement : } X^*(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et} \\ \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X^* = i]) = \mathrm{e}^{-\lambda}\, \dfrac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}. \end{array}}$$

□

Commentaire

- Profitons de cette question pour faire un point sur la notation $X(\Omega)$.
Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{array}$$

Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît.

- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \ \subseteq\ ]-\infty, +\infty[$.
En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire.

- Dans le cas des v.a.r. **discrètes**, il est d'usage relativement courant de confondre :
  × l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),
  × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\big([X = x]\big) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\text{Supp}(X)$.

- Si X est une v.a.r. **discrète**, il est à noter que toute valeur prise par X avec probabilité non nulle est une valeur prise par X. Autrement dit, on a toujours :

$$\boxed{\text{Supp}(X) \subseteq X(\Omega)}$$

En effet, si $x \in \text{Supp}(X)$ alors $\mathbb{P}\big([X = x]\big) \neq 0$. On en déduit : $[X = x] \neq \varnothing$. Il existe donc (au moins) un élément $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = x$. La v.a.r. X prend donc la valeur x.

- La réciproque n'est pas forcément vérifiée : $X(\Omega) \cancel{\subseteq} \text{Supp}(X)$.
Autrement dit, une v.a.r. X peut prendre une valeur avec probabilité nulle. On peut par exemple penser à l'expérience consistant au lancer d'un dé à 6 faces. La v.a.r. X qui donne le résultat du dé a pour ensemble image $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$. Si on considère que le dé est truqué et ne renvoie que 6, alors le support de X est $\text{Supp}(X) = \{6\}$.

- Ici, seul le support de X^* est précisé et non son ensemble image. Pour l'étude de la v.a.r. X, on se permet alors d'écrire :

« Dans la suite, on **considère** : $X^*(\Omega) = \mathbb{N}^*$ $(= \text{Supp}(X))$ »

En **décrétant** la valeur de $X^*(\Omega)$, on ne commet pas une erreur mais on décide d'ajouter une hypothèse qui ne fait pas partie de l'énoncé. Cette audace permet de travailler avec un ensemble image connu, ce qui permet de structurer certaines démonstrations.

(ii) Vérifier que X^* suit la même loi que $X+1$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}$. En notant $Y = X+1$, on en déduit : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}([Y=i]) \ = \ \mathbb{P}([X+1=i]) \ = \ \mathbb{P}([X=i-1]) \ = \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}$$

- Avec la question précédente, on remarque :
  - $\times$ $X^*(\Omega) = \mathbb{N}^* = (X+1)(\Omega)$
  - $\times$ $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X^*=i]) = \mathbb{P}([X+1=i])$

$$\boxed{\text{On en conclut que } X^* \text{ et } X+1 \text{ ont même loi.}}$$

□

b) Réciproquement, on suppose que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance non nulle, telle que X^* et $X+1$ suivent la même loi.

(i) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$: $\mathbb{P}(\,[X=k]\,) = \dfrac{\mathbb{E}(X)}{k}\ \mathbb{P}(\,[X=k-1]\,)$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme X^* et $X+1$ on même loi :

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbb{P}([X^*=k]) & = & \mathbb{P}([X+1=k]) \\ \text{donc} & \dfrac{k}{\mathbb{E}(X)}\ \mathbb{P}([X=k]) & = & \mathbb{P}([X=k-1]) \quad \textit{(par définition de } X^*\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=k]) = \dfrac{\mathbb{E}(X)}{k}\ \mathbb{P}([X=k-1]).}$$

□

(ii) Montrer que pour tout k entier naturel : $\mathbb{P}(\,[X=k]\,) = \dfrac{\big(\mathbb{E}(X)\big)^k}{k!}\ \mathbb{P}(\,[X=0]\,)$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : \mathbb{P}([X=k]) = \dfrac{\big(\mathbb{E}(X)\big)^k}{k!}\ \mathbb{P}([X=0])$.

▶ **Initialisation**
On remarque :

$$\frac{\big(\mathbb{E}(X)\big)^0}{0!}\ \mathbb{P}([X=0]) \ = \ \frac{1}{1}\ \mathbb{P}([X=0]) \ = \ \mathbb{P}([X=0])$$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▶ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}([X=k+1]) = \dfrac{\big(\mathbb{E}(X)\big)^{k+1}}{(k+1)!}\ \mathbb{P}([X=0])$).
D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([X=k+1]) \ = \ \frac{\mathbb{E}(X)}{k+1}\ \mathbb{P}([X=(k+1)-1]) \ = \ \frac{\mathbb{E}(X)}{k+1}\ \mathbb{P}([X=k])$$

Par hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\mathbb{P}([X=k+1]) \;=\; \frac{\mathbb{E}(X)}{k+1}\,\frac{\big(\mathbb{E}(X)\big)^k}{k!}\,\mathbb{P}([X=0]) \;=\; \frac{\big(\mathbb{E}(X)\big)^{k+1}}{(k+1)!}\,\mathbb{P}([X=0])$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}([X=k]) = \frac{\big(\mathbb{E}(X)\big)^k}{k!}\,\mathbb{P}([X=0]).}$$

□

(iii) En déduire la loi de X.

Démonstration.

- On sait déjà d'après l'énoncé : $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$.
- D'après la question précédente : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X=k]) = \dfrac{\big(\mathbb{E}(X)\big)^k}{k!}\,\mathbb{P}([X=0])$. Il reste donc à déterminer la valeur de $\mathbb{P}([X=0])$.
  × La famille $\big(\,[X=k]\,\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X=k]) \;=\; 1$$

  × Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X=k]) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\big(\mathbb{E}(X)\big)^k}{k!}\,\mathbb{P}([X=0]) && \textit{(d'après la question précédente)}\\ &= \mathbb{P}([X=0])\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\big(\mathbb{E}(X)\big)^k}{k!}\\ &= \mathbb{P}([X=0])\,\mathrm{e}^{\mathbb{E}(X)} && \textit{(car } \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\big(\mathbb{E}(X)\big)^k}{k!} \textit{ est une série exponentielle de paramètre } \mathbb{E}(X)\textit{)}\end{aligned}$$

  On en déduit : $\mathbb{P}([X=0])\,\mathrm{e}^{\mathbb{E}(X)} = 1$.

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}([X=0]) = \mathrm{e}^{-\mathbb{E}(X)}.}$$

  × Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([X=k]) \;=\; \frac{\big(\mathbb{E}(X)\big)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\mathbb{E}(X)}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } X \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\mathbb{E}(X)\right).}$$

□

Commentaire

Dans cette question ***3.***, on a démontré :

$$X\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda) \quad \underset{\textbf{3.b)}}{\overset{\textbf{3.a)}}{\substack{\Longrightarrow\\ \Longleftarrow}}} \quad \left\{\begin{array}{l} X(\Omega)\subset\mathbb{N}\\ X \text{ admet une espérance } \lambda>0\\ X^* \text{ et } X+1 \text{ ont même loi}\end{array}\right.$$

On a ainsi démontré que les seules v.a.r. X à valeurs entières telles que X^* et $X+1$ ont même loi sont celles qui suivent une loi de Poisson.

4. Le paradoxe du temps d'attente du bus.
Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel, et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ telle que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$: $\mathbb{P}([X = k]) > 0$. On suppose qu'à un arrêt de bus donné, les intervalles de temps entre deux bus consécutifs, exprimés en minutes, sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. Une personne arrive à cet arrêt à un instant aléatoire, et se demande combien de temps elle va attendre.

a) Une première idée est que la personne arrive à un instant uniforme entre deux arrivées de bus, séparées par un intervalle de X minutes. On note T la variable aléatoire qui représente le temps d'attente (à valeurs dans $[\![1, n]\!]$) et on suppose donc que pour tout entier k élément de $[\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}_{[X=k]}([T = j]) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & \text{si } j \in \{1, \ldots, k\} \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}$$

(i) Montrer que pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a : $\sum\limits_{j=1}^{n} j\, \mathbb{P}_{[X=k]}([T = j]) = \dfrac{k+1}{2}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} j\ \mathbb{P}_{[X=k]}([T = j]) &= \sum_{j=1}^{k} j\ \mathbb{P}_{[X=k]}([T = j]) + \cancel{\sum_{j=k+1}^{n} j\ \mathbb{P}_{[X=k]}([T = j])} \\ &= \sum_{j=1}^{k} j\ \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} j \\ &= \frac{1}{\cancel{k}}\ \frac{\cancel{k}\ (k+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} j\ \mathbb{P}_{[X=k]}([T = j]) = \frac{k+1}{2}.}$$

□

(ii) En déduire : $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} j\, \mathbb{P}([X = k])\, \mathbb{P}_{[X=k]}([T = j]) = \dfrac{\mathbb{E}(X+1)}{2}$.

Démonstration.

- La v.a.r. X est finie. Elle admet donc une espérance. On en déduit que la v.a.r. $X + 1$ admet une espérance en tant que transformée affine de X qui en admet une.
- De plus :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} j\ \mathbb{P}([X = k]\ \ \mathbb{P}_{[X=k]}([T = j]) \right) \\ = & \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = k]) \left(\sum_{j=1}^{n} j\ \mathbb{P}_{[X=k]}([T = j]) \right) \\ = & \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = k])\ \frac{k+1}{2} && \textit{(d'après la question précédente)} \\ = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (k+1)\ \mathbb{P}([X = k]) \\ = & \frac{1}{2}\ \mathbb{E}(X+1) && \textit{(par théorème de transfert)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} j\ \mathbb{P}([X = k])\ \mathbb{P}_{[X=k]}([T = j]) \right) = \frac{\mathbb{E}(X+1)}{2}}$$

□

(iii) Démontrer : $\mathbb{E}(T) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} j\, \mathbb{P}(\,[X=k]\,)\, \mathbb{P}_{[X=k]}(\,[T=j]\,)$.

Démonstration.
Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\begin{array}{rl} & \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} j\ \mathbb{P}([X=k])\ \mathbb{P}_{[X=k]}([T=j]) \right) \\ = & \sum\limits_{j=1}^{n} j \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k] \cap [T=j]) \right) \\ = & \sum\limits_{j=1}^{n} j\mathbb{P}([T=j]) \qquad \textit{(par formule des probabilités totales sur le système complet d'événements } \left(\,[X=k]\,\right)_{k\in[\![1,n]\!]}\textit{)} \\ = & \mathbb{E}(T) \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} j\ \mathbb{P}([X=k])\ \mathbb{P}_{[X=k]}([T=j]) \right)}$$ □

(iv) Démontrer : $\mathbb{E}(T) = \dfrac{\mathbb{E}(X+1)}{2}$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(T) & = & \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} j\ \mathbb{P}([X=k])\ \mathbb{P}_{[X=k]}([T=j]) \right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} j\ \mathbb{P}([X=k])\ \mathbb{P}_{[X=k]}([T=j]) \right) \\ & = & \dfrac{\mathbb{E}(X+1)}{2} \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{4.a)(ii)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \dfrac{\mathbb{E}(X+1)}{2}}$$ □

b) En réalité, en arrivant à l'arrêt de bus, on « tombe » dans un intervalle entre deux bus de manière proportionnelle à sa taille (plus l'intervalle est long, plus on a de chances de « tomber » dedans) : l'intervalle de temps est X^*, suivant la loi de X biaisée par la taille. Le temps d'attente T^* vérifie donc en fait, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\mathbb{P}_{[X^*=k]}(\,[T^*=j]\,) \ = \ \begin{cases} \dfrac{1}{k} & \text{si } j \in \{1, \ldots, k\} \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}$$

(i) Montrer que pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a : $\sum\limits_{j=1}^{n} j\, \mathbb{P}_{[X^*=k]}(\,[T^*=j]\,) = \dfrac{k+1}{2}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
La loi de T^* conditionnellement à $[X^*=k]$ est exactement la même que la loi de T conditionnellement à $[X=k]$ (loi donnée en question ***4.a)***.

$$\boxed{\text{Avec les mêmes calculs qu'en } \textbf{\textit{4.a)(i)}} : \forall k \in [\![1, n]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{n} j\ \mathbb{P}_{[X=k]}([T=j]) = \dfrac{k+1}{2}.}$$ □

(ii) Démontrer : $\mathbb{E}(T^*) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} j\, \mathbb{P}(\,[X^* = k]\,)\, \mathbb{P}_{[X^*=k]}(\,[T^* = j]\,)$.

Démonstration.
On effectue un raisonnement tout à fait similaire à celui de la question ***4.a)(iii)*** en appliquant la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $\big(\,[X^* = k]\,\big)_{k\in[\![1,n]\!]}$.

$$\boxed{\mathbb{E}(T^*) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} j\, \mathbb{P}(\,[X^* = k]\,)\, \mathbb{P}_{[X^*=k]}(\,[T^* = j]\,) \right)}$$

□

(iii) Démontrer : $\mathbb{E}(T^*) = \dfrac{\mathbb{E}(X^*+1)}{2}$.

Démonstration.
On effectue exactement le même raisonnement qu'en question ***4.a)(iv)***.

$$\boxed{\mathbb{E}(T^*) = \frac{\mathbb{E}(X^*+1)}{2}}$$

□

(iv) En déduire qu'on a : $\mathbb{E}(T^*) \geqslant \mathbb{E}(T)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T^*) \geqslant \mathbb{E}(T) &\Leftrightarrow \frac{\mathbb{E}(X^*+1)}{2} \geqslant \frac{\mathbb{E}(X+1)}{2} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{4.a)(iv)}} \textit{ et } \textbf{\textit{4.b)(iii)}}\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}(X^*+1) \geqslant \mathbb{E}(X+1) \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}(X^*)+1 \geqslant \mathbb{E}(X)+1 && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}(X^*) \geqslant \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

- Démontrons alors : $\mathbb{E}(X^*) \geqslant \mathbb{E}(X)$.
  × $X(\Omega) \subset [\![1,n]\!] \subset \mathbb{N}$
  × Comme $X(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$: $\mathbb{P}([X=0]) = 0 < 1$.
  × Comme la v.a.r. X est finie, elle admet un moment d'ordre 2 (et donc une espérance).

  On se place ainsi dans le cadre de la question ***2.***. On en déduit :

$$\mathbb{E}(X^*) \;\geqslant\; \mathbb{E}(X)$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{E}(T^*) \geqslant \mathbb{E}(T).}$$

Commentaire

- Citer les hypothèses d'un théorème avant son utilisation est **indispensable**. Lorsque ce théorème n'est pas un résultat du cours mais un résultat démontré dans un sujet de concours, ce réflexe doit perdurer.
- On utilise par exemple dans cette question un résultat démontré dans une question antérieure (question ***2.***). On n'omettra donc en aucun cas de vérifier que l'on est placé dans le bon cadre d'application de cette propriété.

□

Deuxième partie : Applications en Statistique

On s'intéresse maintenant au cas où le biais par la taille peut être utilisé en statistique, pour construire des estimateurs non biaisés. Une compagnie d'électricité possède n clients où n est un entier naturel non nul donné. Lors de l'année écoulée, le $i^{\text{ème}}$ client a payé x_i euros ($x_i > 0$), mais a en réalité consommé une quantité d'électricité correspondant à y_i euros ($y_i > 0$). La compagnie sait combien ses clients ont payé, et elle souhaite estimer le rapport : $\theta = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$ pour déterminer à quel point elle a mal facturé ses clients.

5. Soit m un entier fixé tel que $1 \leqslant m \leqslant n$. On note $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des parties $A \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinal m. On considère une variable aléatoire R, à valeurs dans $\mathcal{P}_m$ et de loi uniforme, c'est-à-dire telle que pour toute partie $A \in \mathcal{P}_m$: $\mathbb{P}\big(\, [R = A] \,\big) = \dfrac{1}{\binom{n}{m}}$.

Commentaire

- Remarquons tout d'abord que la variable aléatoire R `N'est PAS` une variable aléatoire **réelle**. En effet :
  - × comme son nom l'indique, une variable aléatoire réelle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ (une variable aléatoire réelle X peut prendre la valeur 3 ou $\sqrt{2}$ par exemple).
  - × la variable aléatoire R est à valeurs dans un ensemble de parties. Autrement dit, il s'agit d'une variable aléatoire qui peut prendre pour valeur un **ensemble** (la variable aléatoire R peut prendre la valeur $\{1\}$ ou $\varnothing$ par exemple).

  Cette partie commence donc par l'introduction d'un objet hors norme et nulle part défini dans le programme officiel. Ce dernier se limite en effet à l'étude des variables aléatoires réelles. Le fait qu'une v.a.r. prenne ses valeurs dans $\mathbb{R}$ est loin d'être anecdotique. C'est ce qui permet la bonne définition de la notion de fonction de répartition (pour considérer l'événement $[X \leqslant x]$ par exemple, encore faut-il que l'on puisse comparer x aux valeurs que peut prendre X !), de la notion d'espérance, de la notion de variance. C'est ce qui permet de considérer des transformées affines de v.a.r. , ou encore la somme de v.a.r. , ou encore un produit de v.a.r. . C'est ce qui permet de considérer une transformée $h(X)$ (où h est une fonction $h : X(\Omega) \to \mathbb{R}$). Par exemple, s'il est simple de considérer e^X pour X un variable aléatoire à valeurs réelles, on ne peut donner de sens à e^R puisque R prend pour valeurs des ensembles !
- Pour s'assurer de la bonne compréhension de la variable aléatoire R, commençons par faire un point sur la notion de partie d'un ensemble. Pour fixer les idées, on peut considérer $n = 3$ et noter $E = \{1, 2, 3\}$. Une partie de E n'est autre qu'un sous-ensemble de E. Ainsi, l'**ensemble** des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$, est un **ensemble** d'ensembles défini comme suit :

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{P}(E) & = & \{ \ \varnothing, & \textit{(la partie vide)} \\ & & \quad \{1\}, \{2\}, \{3\}, & \textit{(les parties à 1 élément)} \\ & & \quad \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, & \textit{(les parties à 2 éléments)} \\ & & \quad \{1,2,3\} \hspace{4em} \} & \textit{(la partie pleine)} \end{array}$$

  L'ensemble $\mathcal{P}_m$ est construit en ne sélectionnant que les parties de cardinal m. On a donc :

$$\mathcal{P}_1 = \Big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\Big\}, \quad \mathcal{P}_2 = \Big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\Big\}, \quad \mathcal{P}_3 = \Big\{\{1,2,3\}\Big\}$$

Commentaire

- Continuons les précisions précédentes en fixant $m = 2$ par exemple. La variable aléatoire R prend alors ses valeurs dans $\mathcal{P}_2 = \Big\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\Big\}$, ensemble qui contient 3 ensembles ($\text{Card}\,\big(\mathcal{P}_2\big) = 3$). Il est précisé que R est de loi uniforme. Ainsi, R prend pour valeur chacun de ces ensembles avec la même probabilité. Plus précisément :

$$\mathbb{P}\big(\,[R = \{1,2\}]\,\big) \;=\; \mathbb{P}\big(\,[R = \{1,3\}]\,\big) \;=\; \mathbb{P}\big(\,[R = \{2,3\}]\,\big) \;=\; \frac{1}{3}$$

- Remarquons enfin que le coefficient binomial $\binom{n}{m}$, n'est autre, par définition, que le nombre de parties à m éléments d'un ensemble à n éléments. Autrement dit, on a : $\text{Card}\,\big(\mathcal{P}_m\big) = \binom{n}{m}$. La variable aléatoire R prenant pour valeur chacun des ensembles de $\mathcal{P}_m$ avec la même probabilité, on a bien :

$$\forall A \in \mathcal{P}_m, \mathbb{P}\big(\;[R = A]\;\big) \;=\; \frac{1}{\binom{n}{m}}$$

- D'après le point précédent, la variable aléatoire R prend un nombre fini de valeurs. Si on conserve l'exemple $n = 3$ et $m = 2$, l'ensemble $\mathcal{P}_2$ est fini et de cardinal : $\text{Card}\,\big(\mathcal{P}_2\big) = \binom{3}{2} = 3$. Cet ensemble peut donc être mis en bijection avec l'ensemble $[\![1,3]\!]$. Une telle bijection revient à numéroter les ensembles de $\mathcal{P}_2$. Par exemple, on peut numéroter comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \{1,2\} & \longleftrightarrow & 1 \\ \{1,3\} & \longleftrightarrow & 2 \\ \{2,3\} & \longleftrightarrow & 3 \end{array}$$

  À l'aide d'une telle bijection (c'est-à-dire une numérotation des ensembles de $\mathcal{P}_2$), chaque ensemble de $\mathcal{P}_2$ est identifié par un numéro. On aurait pu se servir de cet identifiant pour définir R. Plus précisément, au lieu de définir la variable aléatoire R qui prend pour valeur un ensemble de $\mathcal{P}_2$, on peut définir la variable aléatoire $\tilde{R}$ qui prend pour valeur l'identifiant d'un ensemble de $\mathcal{P}_2$. La variable aléatoire $\tilde{R}$ ainsi définie est une variable aléatoire **réelle**, d'ensemble image $\tilde{R}(\Omega) = [\![1,3]\!]$ et telle que :

$$[R = \{1,2\}] = \Big[\tilde{R} = 1\Big], \quad [R = \{1,3\}] = \Big[\tilde{R} = 2\Big], \quad [R = \{2,3\}] = \Big[\tilde{R} = 3\Big]$$

  On peut généraliser cette idée. En considérant une bijection φ de $\mathcal{P}_m$ dans $[\![1, \binom{n}{m}]\!]$, on peut définir $\tilde{R}$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{P}_m, [R = A] = \Big[\tilde{R} = \varphi(A)\Big]$$

- On peut alors légitimement s'interroger sur la pertinence d'introduire la variable aléatoire R en lieu et place de la variable aléatoire **réelle** $\tilde{R}$ qui a l'énorme avantage d'être un objet qui entre dans le cadre du programme officiel. Le pari du concepteur est certainement que le coût de définition de $\tilde{R}$ (en l'occurrence, l'introduction d'une bijection φ de $\mathcal{P}_m$ dans $[\![1, \binom{n}{m}]\!]$) est trop élevé d'un point de vue conceptuel et risque plus de destabiliser les candidats que de les aider. Ainsi, le choix fait dans l'énoncé peut s'entendre. Il est d'ailleurs particulièrement intéressant de voir comment un candidat s'en tire, en fin d'énoncé, avec une notion jamais vue en cours. Cependant, si ce choix est légitime, il eût été souhaitable qu'il s'accompagnât d'une brève mise en garde des candidats pour souligner l'introduction d'une nouvelle notion (celle de variable prenant pour valeurs des ensembles). Ce faisant, on peut considérer que le coût d'introduction de R se rapproche de celui de $\tilde{R}$. L'impression laissée par ce choix est donc que le concepteur préfère « mettre la poussière sous le tapis ». Dans ce cas, on peut supposer que les correcteurs auront pour consigne de ne pas être trop regardant et auront tendance à attribuer la majeure partie des points même en cas de confusions d'objets.

On souhaite écrire un programme pour choisir l'ensemble R au hasard.

a) On considère la procédure suivante : on prend un premier élément s_1 uniformément dans $\{1, \dots, n\}$, puis un deuxième élément s_2 uniformément dans $\{1, \dots, n\} \setminus \{s_1\}$, etc. puis un $m^{\text{ème}}$ élément s_m uniformément dans $\{1, \dots, n\} \setminus \{s_1, \dots, s_{m-1}\}$. On note $S = (s_1, \dots, s_m)$, qui est un m-uplet aléatoire.

Commentaire

- Là encore, la présentation peut interroger. On introduit la notion de « m-uplet aléatoire » au lieu de signaler que S est une variable aléatoire qui prend pour valeur le m-uplet construit par le procédé décrit. Ce faisant, l'énoncé utilise la notation $S = (s_1, \dots, s_m)$ qui porte à confusion. Pour plus de simplicité, illustrons ce type de confusion pour une v.a.r. X :
  - × écrire $X = 1$ signifie que la v.a.r. X est constante égale à 1,
  - × dire que X prend la valeur 1 signifie que l'événement $[X = 1]$ est réalisé.

  Le concepteur assumant une telle confusion, on peut encore s'attendre à ce que les correcteurs n'aient pas de consigne de fermeté concernant les confusions d'objets.
- On peut par ailleurs s'étonner du manque d'homogénéité de l'énoncé : si on définit S comme dans l'énoncé, on peut tout aussi bien opter pour une présentation similaire pour R. Il s'agit alors de signaler que R est un ensemble aléatoire obtenu par tirage simultané de m nombres de $[\![1, n]\!]$. La question ***10.a)(ii)*** démontre que c'est plutôt cette dernière présentation qui s'inscrit dans l'esprit de l'énoncé.
- Pour mieux appréhender la procédure de choix du m-uplet décrit dans l'énoncé, il suffit de songer à une urne qui contient n-boules numérotées de 1 à n.
  On définit alors les variables aléatoires R et S comme suit :
  - × la variable aléatoire R prend pour valeur le résultat d'un tirage simultané de m boules dans l'urne,
  - × la variable aléatoire S prend pour valeur le résultat de tirages successifs et sans remise de m boules dans l'urne.

(i) Montrer que pour tout m-uplet $(a_1, \dots, a_m)$ d'entiers distincts de $\{1, \dots, n\}$, on a :

$$\mathbb{P}(\,[S = (a_1, \dots, a_m)]\,) \;=\; \frac{(n-m)!}{n!}$$

Démonstration.
Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, notons X_i la v.a.r. qui donne le résultat du $i^{\text{ème}}$ tirage de la procédure décrite dans l'énoncé.

- Remarquons tout d'abord :

$$[S = (a_1, \dots, a_m)] \;=\; [X_1 = a_1] \,\cap\, [X_2 = a_2] \,\cap\, \dots \,\cap\, [X_m = a_m]$$

- Ainsi, par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\big(\,[S = (a_1, \dots, a_m)]\,\big) \\ = \;& \mathbb{P}\big(\,[X_1 = a_1]\,\big) \times \mathbb{P}_{[X_1=a_1]}\big(\,[X_2 = a_2]\,\big) \times \dots \times \mathbb{P}_{[X_1=a_1]\cap\ldots\cap[X_{m-1}=a_{m-1}]}\big(\,[X_m = a_m]\,\big) \qquad (*) \\ = \;& \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \dots \times \frac{1}{n-m+1} \end{aligned}$$

(car chaque tirage est effectué de manière uniforme dans un ensemble initialement à n éléments et dont le cardinal décrémente de 1 à chaque étape)

L'égalité $(*)$ est justifiée par le fait que : $\mathbb{P}\big(\,[X_1 = a_1] \cap \ldots \cap [X_{m-1} = a_{m-1}]\,\big) \neq 0$.

- Or, on remarque :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \ldots \times \frac{1}{n-m+1} \\ = \ & \frac{1}{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-m+1)} \\ = \ & \frac{(n-m) \times (n-(m-1)) \times \ldots \times 1}{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-m+1) \times (n-m) \times (n-(m-1)) \times \ldots \times 1} \ = \ \frac{(n-m)!}{n!} \end{aligned}$$

Finalement, on a bien, pour tout m-uplet $(a_1, \ldots, a_m)$ d'entiers distincts de $\{1, \ldots, n\}$:
$$\mathbb{P}(\,[S = (a_1, \ldots, a_m)]\,) \ = \ \frac{(n-m)!}{n!}.$$

Commentaire

- Comme cela a déjà été signalé dans les précédentes remarques, le concepteur ne fait pas de choix affirmé concernant les objets manipulés. En particulier, on ne met pas en avant que S est une variable aléatoire. Cette demi-mesure ne permet pas de comprendre clairement l'esprit du sujet. Globalement, le concepteur pouvait faire deux choix différents :

1) mettre en avant que S, comme R, sont des variables aléatoires. Il est alors naturel, pour résoudre cette question, d'introduire les v.a.r. X_i.

2) insister uniquement sur la procédure d'obtention des m-uplets (en introduisant éventuellement une urne à n boules numérotées de 1 à n). On cherche alors combien de m-uplets différents peuvent être produits par la procédure. Il s'agit alors d'une question purement de dénombrement. Plus précisément : combien y'a-t-il de m-uplets distincts d'éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$?

On a choisi dans la question précédente la première option. Détaillons maintenant la deuxième option.

- Un m-uplet d'éléments distincts de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est entièrement déterminé par :

× le numéro (élément de $[\![1, n]\!]$) en $1^{\text{ère}}$ position : n possibilités.

× le numéro (élément de $[\![1, n]\!]$) en $2^{\text{ème}}$ position, différent du numéro précédent : $n-1$ possibilités.

× ...

× le numéro (élément de $[\![1, n]\!]$) en $m^{\text{ème}}$ position, différent des numéros précédents : $n-m+1$ possibilités.

Il y a donc $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ tels m-uplets.

- Cette deuxième option semble être celle qui s'inscrit le plus dans l'esprit de cette question. Pour autant, il est important de souligner que R est une variable aléatoire pour le reste du sujet. Le choix le plus pertinent aurait certainement été d'insister en question ***10*** sur la procédure de tirage et de présenter cette question sous forme d'un dénombrement. L'introduction de la variable aléatoire R peut alors être introduite seulement en question ***11***. □

(ii) On note $R = \{s_1, \dots, s_m\}$ l'*ensemble* des entiers tirés lors de la procédure décrite plus haut (l'ordre dans lequel ils ont été tirés n'importe plus). Montrer que pour tout ensemble $A = \{a_1, \dots, a_m\} \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinal m, on a : $\mathbb{P}(\,[R = A]\,) = \dfrac{m!\,(n-m)!}{n!}$.
En déduire que l'ensemble R a été choisi uniformément dans $\mathcal{P}_m$.

Démonstration.
Soit $A = \{a_1, \dots, a_m\} \subset \{1, \dots, n\}$.

- Notons $\mathcal{S}_m$ l'ensemble des bijections de l'ensemble $[\![1, m]\!]$ sur $\{a_1, \dots, a_m\}$ (la réciproque d'une telle bijection n'est autre qu'une numérotation des éléments de $\{a_1, \dots, a_m\}$).
On a alors :
$$[R = \{a_1, \dots, a_m\}] \;=\; \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \left(\bigcap_{i=1}^{m} [X_i = \sigma(i)] \right)$$
En effet, l'événement $[R = \{a_1, \dots, a_m\}]$ est réalisé si et seulement si les éléments a_1, ..., a_m ont été obtenus, dans un certain ordre, lors de la procédure. Autrement dit, l'événement $[R = \{a_1, \dots, a_m\}]$ est réalisé si et seulement si il existe une application $\sigma \in \mathcal{S}_m$ (c'est-à-dire un ordre d'obtention) telle que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, a_i a été obtenu lors du tirage $\sigma^{-1}(a_i)$.
- Et ainsi :
$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(R = \{a_1, \dots, a_m\}\big) \\
=\;& \mathbb{P}\left(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \left(\bigcap_{i=1}^{m} [X_i = \sigma(i)] \right) \right) \\
=\;& \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m} [X_i = \sigma(i)] \right) && \textit{(car les événements de la famille } \big(\bigcap_{i=1}^{m} [X_i = \sigma(i)]\big)_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\
=\;& \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \mathbb{P}\big(\,[X_1 = \sigma(1)]\,\big) \times \mathbb{P}_{[X_1 = \sigma(1)]}\big(\,[X_2 = \sigma(2)]\,\big) \times \dots \times \mathbb{P}_{[X_1 = \sigma(1)] \cap \dots \cap [X_{m-1} = \sigma(m-1)]}\big(\,[X_m = \sigma(m)]\,\big) \;(*) \\
=\;& \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \dots \times \frac{1}{n-m+1} && \textit{(car les tirages se font de manière uniforme dans un ensemble initialement à } n \textit{ éléments et donc le cardinal décrémente de 1 à chaque étape)} \\
=\;& \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \frac{(n-m)!}{n!} \;=\; m! \times \frac{(n-m)!}{n!} && \textit{(car } \mathrm{Card}\,(\mathcal{S}_m) = m!\textit{)}
\end{aligned}$$
L'égalité $(*)$ est obtenue par formule des probabilités composées comme en question ***10.a)(i)***.
$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall A \in \mathcal{P}_m, \mathbb{P}\big(\,[R = A]\,\big) = m! \times \frac{(n-m)!}{n!}.}$$
- On en conclut que pour tout $A \in \mathcal{P}_m$, on a :
$$\mathbb{P}\big(\,[R = A]\,\big) = m! \times \frac{(n-m)!}{n!} = \frac{1}{\frac{n!}{m!\;(n-m)!}} = \frac{1}{\binom{n}{m}}$$

$$\boxed{\text{Comme } \mathrm{Card}\,(\mathcal{P}_m) = \tbinom{n}{m}\text{, on en conclut que l'ensemble } R \text{ a été choisi uniformément dans } \mathcal{P}_m.}$$

Commentaire

- Là encore, on note un défaut de formalisme de l'énoncé qui commence par introduire une variable aléatoire R (au début de la question ***10***) et la définit autrement plus loin (dans cette question ***10.a)(ii)***. Comme on l'a conclu dans la remarque précédente, le réel objet d'étude de cette question ***10*** est la procédure d'obtention d'un ensemble aléatoire. C'est certainement plus une démonstration par dénombrement qui est attendue ici.
- L'idée derrière cette question est de dénombrer l'ensemble des m-uplets permettant d'obtenir le même ensemble $\{a_1, \ldots, a_m\}$. Pour fixer les idées, considérons le cas $n = 9$ et $m = 3$. L'ensemble $\{1, 3, 8\}$ est obtenu si lors des 3 tirages, on a obtenu 1, 3 et 8. L'événement $[S = \{1, 3, 8\}]$ est réalisé par tous les 3-tirages suivants :

$$(1,3,8) \quad (1,8,3) \quad (3,1,8) \quad (3,8,1) \quad (8,1,3) \quad (8,3,1)$$

  On dénombre ici six 3-uplets différents. Chacun de ces 3-uplets correspond à une manière d'ordonner les éléments 1, 3, 8. Autrement dit, on considère toutes les permutations de l'ensemble $\{1, 3, 8\}$. Il y en a $3! = 6$. Finalement, à chaque parties à 3 éléments de $[\![1, 9]\!]$ correspond $3! = 6$ différents 3-uplets. Il y a donc $3!$ fois moins de parties à 3 éléments de $[\![1, 9]\!]$ que de 3-uplets d'éléments distincts de $[\![1, 9]\!]$.
  De manière générale, il y a $m!$ fois moins de parties à m éléments de $[\![1, n]\!]$ que de m-uplets d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$. Cela permet de conclure :

$$\binom{n}{m} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

- Lors de l'introduction de la variable R, il est précisé : $\forall A \in \mathcal{P}_m, \mathbb{P}\big([R = A]\big) = \dfrac{1}{\binom{n}{m}}$.
  Or, il s'agit de démontrer ici : $\forall A \in \mathcal{P}_m, \mathbb{P}\big([R = A]\big) = m! \times \dfrac{(n-m)!}{n!} = \dfrac{1}{\binom{n}{m}}$.
  La conclusion n'est autre que l'hypothèse faite dans l'énoncé ! Il faut en réalité comprendre que l'on cherche à démontrer que la procédure décrite dans l'énoncé permet de produire un objet (une variable aléatoire R) qui a la propriété attendue d'uniformité. Le problème provient du fait que le concepteur a donné le même nom (à savoir R) à la variable aléatoire qui possède la propriété et celle dont on cherche à démontrer qu'elle possède la propriété. Cette ambiguïté risque, à raison, de troubler le candidat. □

b) Pour un réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier naturel inférieur ou égal à x. Montrer que si U suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, alors $X = 1 + \lfloor n\,U \rfloor$ suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.

Démonstration.

- Comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1[)$ on a : $U(\Omega) = [0, 1[$.
  On en déduit :

$$(n\,U)(\Omega) = [0, n[\qquad \text{et} \qquad \big(\lfloor n\,U \rfloor\big)(\Omega) = [\![0, n[\![= [\![0, n-1]\!]$$

  On obtient finalement :

$$\big(1 + \lfloor n\,U \rfloor\big)(\Omega) = [\![1, n]\!]$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } X(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$

- Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([X=k]\big) & = & \mathbb{P}\big([1+\lfloor n\,U\rfloor = k]\big) & \\
& = & \mathbb{P}\big([\lfloor n\,U\rfloor = k-1]\big) & \\
& = & \mathbb{P}\big([k-1 \leqslant n\,U < (k-1)+1]\big) & \textit{(par définition de la partie entière)} \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{k-1}{n} \leqslant U < \dfrac{k}{n}\right]\right) & \textit{(car } n>0\textit{)} \\
& = & F_U\left(\frac{k}{n}\right) - F_U\left(\frac{k-1}{n}\right) & \textit{(car } U \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\
& = & \dfrac{k}{n} - \dfrac{k-1}{n} & \textit{(car } U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)\textit{)}
\end{array}$$

- On en conclut :

$$\left\{\begin{array}{l} X(\Omega) = [\![1,n]\!] \\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\big([X=k]\big) = \dfrac{1}{n} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } X = 1+\lfloor n\,U\rfloor \text{ suit bien la loi uniforme sur } \{1,\dots,n\}.}$$

Commentaire

- On rappelle qu'on appelle fonction partie entière la fonction suivante.

$$\begin{array}{rccccl} \lfloor\,.\,\rfloor & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} & \\ & & x & \mapsto & \lfloor x\rfloor & = \text{ le plus grand entier } m\in\mathbb{Z} \text{ tel que } m \leqslant x \end{array}$$

On peut aussi définir $\lfloor x\rfloor$ comme l'unique entier relatif m vérifiant la propriété :

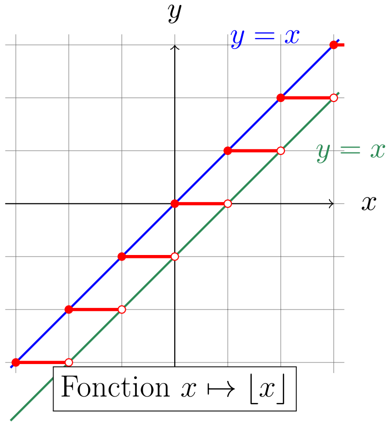
$$m \leqslant x < m+1$$

- Une propriété fondamentale provenant de la définition de cette fonction est donc :

$$\boxed{\forall u\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{Z},\ \big(\ \lfloor u\rfloor = m \quad\Leftrightarrow\quad m \leqslant u < m+1\ \big)}$$

En particulier : $\forall x\in\mathbb{R},\ \lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$.

- Enfin, rappelons que la représentation graphique de la fonction partie entière est la suivante :



Fonction $x \mapsto \lfloor x\rfloor$

$\square$

c) On rappelle que la fonction `rand()` renvoie un nombre aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$, et que `floor(x)` renvoie la partie entière de `x`. Écrire une fonction `Uniforme` en **Scilab** qui prend en argument un entier n, et renvoie un nombre (aléatoire), uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.

```
function x = Uniforme(n)
    ...
endfunction
```

Commentaire

- La fonction `rand` permet de simuler une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0, 1[$. On préférera cette présentation plutôt que celle de l'énoncé qui se sert de la notion peu rigoureuse de « nombre aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$ ».
- De même, le but de la question est de produire une fonction `Uniforme` qui simule une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Démonstration.
Le programme attendu est le suivant.

```
1 function x = Uniforme(n)
2     u = rand()
3     x = 1 + floor(n ⋆ u)
4 endfunction
```

Détaillons les différents éléments de ce programme.

- En ligne 2, on crée tout d'abord la variable `u`.

```
2     u = rand()
```

Par définition de la fonction `rand`, la variable `u` contient le résultat de la simulation d'une v.a.r. U de loi uniforme sur $[0, 1[$.

- Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1[)$, on sait d'après la question précédente que la v.a.r. $X = 1 + \lfloor n\ U \rfloor$ est telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Le résultat attendu par la fonction n'est autre que la simulation de cette v.a.r. X. On le stocke dans la variable `x`.

```
3     x = 1 + floor(n ⋆ u)
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procédera de même dans les autres questions **Scilab**.

□

d) Écrire une fonction `Selection`, qui prend en argument un vecteur `V` et renvoie un élément `x` de `V` pris de manière aléatoire parmi tous les éléments de `V`, ainsi que le vecteur `W`, égal au vecteur `V` auquel on a enlevé l'élément `x`. L'instruction `length(V)` renvoie le nombre d'éléments du vecteur `V`.

```
function [x, W] = Selection(V)
    n = length(V)
    ...
endfunction
```

Démonstration.
Le programme attendu est le suivant.

```
1  function [x, W] = Selection(V)
2      n = length(V)
3      j = Uniforme(n)
4      x = V(n)
5      W = V( [1:(j-1), (j+1):n] )
6  endfunction
```

Détaillons les différents éléments de ce programme.

- Rappelons que l'instruction `Uniforme(n)` permet de simuler une v.a.r. de loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, \mathtt{n} \rrbracket)$. Ainsi, en ligne 3, on stocke dans la variable `j` un entier choisi aléatoirement dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

```
3      j = Uniforme(n)
```

- On stocke alors dans la variable `x` le `j`$^{\text{ème}}$ élément de `V`. C'est le premier résultat attendu de la fonction.

```
4      x = V(n)
```

- Enfin, on stocke dans la variable `W` le contenu du vecteur `V` auquel on a enlevé son `j`$^{\text{ème}}$ élément qui n'est autre que `x`. Rappelons tout d'abord que l'instruction `[1:(j-1), (j+1):n]` pemet de créer une matrice ligne contenant tous les entiers de 1 à `n` à l'exception de l'entier `j`. Ainsi, l'instruction `V( [1:(j-1), (j+1):n] )` permet de sélectionner tous les éléments du vecteur `V` à l'exception du `j`$^{\text{ème}}$ élément.

```
5      W = V( [1:(j-1), (j+1):n] )
```

Commentaire

Dans la question précédente, on a nommé `x` un nombre choisi de manière aléatoire dans l'ensemble $\{1, \ldots, \mathtt{n}\}$. Dans cette nouvelle question, `x` ne sert plus à désigner un nombre de $\{1, \ldots, \mathtt{n}\}$ mais un élément du vecteur `V` dont on sait seulement qu'il est de taille `n`. Ainsi, d'une question à l'autre, `x` désigne un numéro `j` de $\{1, \ldots, \mathtt{n}\}$ puis le `j`$^{\text{ème}}$ élément d'un vecteur. Il était certainement plus pertinent, pour coller à la procédure décrite dans l'énoncé, de stocker le premier résultat de cette fonction dans une variable nommé `a`. $\square$

e) Compléter le programme suivant, qui prend en argument deux entiers n et m avec $m \leqslant n$, et renvoie un vecteur R de m entiers distincts, pris uniformément dans $\{1, \dots, n\}$:

```
function R = Choix(m, n)
    V = 1:n
    R = []
    for i = 1:m
        ...
    end
endfunction
```

Démonstration.
Le programme attendu est le suivant.

```
function R = Choix(m, n)
    V = 1:n
    R = []
    for i = 1:m
        [x, V] = Selection(V)
        R = [R, x]
    end
endfunction
```

Détaillons les différents éléments de ce programme.

- **Début du programme**
  - La variable V sert à modéliser l'ensemble dans lequel les tirages vont s'effectuer. Initialement, le tirage s'effectue dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. C'est pourquoi on initialise le vecteur V à 1:**n** (instruction qui permet d'obtenir un vecteur constitué de tous les entiers compris entre 1 et n). Ce vecteur V sera mis à jour lors du programme.

```
    V = 1:n
```

  - La variable **R** va accumuler, au fur et à mesure, chaque résultat du tirage qu'on simule. C'est pourquoi on initialise ce vecteur à la matrice vide : tant qu'on n'a pas effectué de tirage, **V** ne contient rien.

```
    R = []
```

- **Structure itérative**
  Il s'agit de simuler m tirages successifs, et sans remise, dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.
  L'idée est la suivante. Supposons qu'au début d'un certain tour de boucle $i \in [\![1, m]\!]$:
  × la variable V est le vecteur constitué de tous les entiers de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ privé des $i - 1$ premiers entiers tirés (en particulier, au début du premier tour de boucle, le vecteur V contient tous les entiers de $\{1, \dots, n\}$).
  × la variable R contient les entiers tirés lors des $i - 1$ premiers tirages (en particulier, au début du premier tour de boucle, le vecteur R ne contient rien).

On met alors à jour les variables `V` et `R`. Plus précisément :

– on simule un tirage dans l'ensemble des entiers contenus dans `V` et on retire de `V` l'élément `x` obtenu lors de ce tirage.

```
[x, V] = Selection(V)
```

– on ajoute à `R` l'élément `x` tiré.

```
R = [R, x]
```

Plus précisément, on stocke dans `R` la concaténation du contenu actuel du vecteur `R` et de la valeur de la variable `x`.

Commentaire

Procéder par concaténation n'a pas beaucoup de sens dans cette question. En effet, on sait dès le début du programme que le vecteur `R` va contenir `m` éléments. Il convient donc de définir initialement `R` comme un vecteur à `m` éléments. Cela peut se faire à l'aide de la fonction **`zeros`** par exemple.

```
R = zeros(1, m)
```

Le `i`$^{\text{ème}}$ tour de boucle permet alors de définir le contenu du `i`$^{\text{ème}}$ élément de `R`.

```
R(i) = x
```

En agissant ainsi, on est assuré qu'au début du $(i+1)^{\text{ème}}$ tour de boucle, les variables `V` et `R` contiennent respectivement :

× le vecteur constitué de tous les entiers de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ privé des `i` premiers entiers tirés.

× le vecteur constitué de tous les entiers tirés lors des `i` premiers tirages.

- **Fin du programme**

La propriété évoquée ci-dessus permet de conclure qu'à l'issue de la boucle (à l'issue du `m`$^{\text{ème}}$ tour de boucle), les variables `V` et `R` contiennent respectivement :

× le vecteur constitué de tous les entiers de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ privé des `m` entiers tirés.

× le vecteur constitué de tous les entiers tirés lors des `m` tirages.

On simule ainsi la procédure décrite dans l'énoncé. La question ***10.a)(ii)*** permet de s'assurer que cette procédure permet d'obtenir un vecteur constitué de `m` entiers distincts, pris uniformément dans $\{1, \dots, n\}$, ce qui répond à la question.

Commentaire

Afin de démontrer la correction de ce programme, nous avons exhibé un **invariant de boucle**. En démontrant que cette propriété est vraie avant chaque tour de boucle, on peut conclure quant au contenu des variables à l'issue de la boucle. □

6. Pour une partie $A \in \mathcal{P}_m$, on définit :

$$\bar{x}_A = \frac{1}{m} \sum_{i\in A} x_i, \quad \bar{y}_A = \frac{1}{m} \sum_{i\in A} y_i, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

La compagnie décide d'utiliser $\theta_R = \dfrac{\bar{y}_R}{\bar{x}_R}$ comme estimateur de θ.

a) On définit deux variables aléatoires $X = \bar{x}_R = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{i\in R} x_i$ et $Y = \bar{y}_R = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{i\in R} y_i$, qui correspondent aux montants moyens payés et consommés par les m clients du groupe tiré au hasard.

(i) Démontrer : $\mathbb{E}(X) = \dbinom{n}{m}^{-1} \sum\limits_{A\in\mathcal{P}_m} \bar{x}_A$.

(ii) Soit $1 \leqslant i \leqslant n$ un entier naturel. Calculer le nombre de parties $A \in \mathcal{P}_m$ telles que $i \in A$.

(iii) En déduire :

$$\sum_{A\in\mathcal{P}_m} \sum_{i\in A} x_i \;=\; \binom{n-1}{m-1} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

(iv) Conclure : $\mathbb{E}(X) = \bar{x}$. On **admettra** que de même on a : $\mathbb{E}(Y) = \bar{y}$.

(v) Exprimer θ en fonction de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

b) Démontrer : $\mathbb{E}(\theta_R) = \mathbb{E}\left(\dfrac{Y}{X}\right)$.

c) On donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si W et Z sont deux variables aléatoires strictement positives, admettant un moment d'ordre deux : $\mathbb{E}(W\,Z) \leqslant \left(\mathbb{E}(W^2)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}(Z^2)\right)^{\frac{1}{2}}$, avec égalité si et seulement s'il existe un $\alpha > 0$ tel que $W = \alpha\, Z$.

(i) Démontrer : $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) \geqslant \dfrac{1}{\mathbb{E}(X)}$.

(ii) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si X est une variable aléatoire constante, c'est-à-dire $X = \mathbb{E}(X) = \bar{x}$.

(iii) Conclure que $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{1}{\mathbb{E}(X)}$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \bar{x}$.

d) Si on suppose que X et Y sont indépendantes, montrer que $\mathbb{E}(\theta_R) \geqslant \theta$, avec égalité si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \bar{x}$.

Ainsi, $\mathbb{E}(\theta_R)$ n'est pas forcément égal à θ : on dit alors que θ_R est un estimateur *biaisé* de θ.

7. Ce problème peut être résolu en choisissant les m clients non de manière uniforme comme dans la question ***10.***, mais de manière biaisée par la taille. On commence par choisir une variable aléatoire J à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, dont la loi est donnée par : $\mathbb{P}(\,[J = i]\,) = \dfrac{x_i}{\sum\limits_{r=1}^{n} x_r}$. Ensuite, étant donné J, on choisit un groupe V de $m-1$ clients parmi les $n-1$ clients différents de J, de manière uniforme. Autrement dit, pour toute partie $A \in \mathcal{P}_m$, et tout $i \in A$, on a :

$$\mathbb{P}_{[J=i]}(\,[V = A \setminus \{i\}]\,) \;=\; \frac{1}{\binom{n-1}{m-1}}$$

Le groupe de clients examiné est alors : $R = V \cup \{J\}$.

a) On commence par déterminer $\mathbb{P}(\,[R = A]\,)$, pour $A \in \mathcal{P}_m$ donné.

(i) Démontrer :

$$\mathbb{P}(\,[R = A]\,) \;=\; \sum_{i\in A} \mathbb{P}(\,[J = i]\,)\, \mathbb{P}_{[J=i]}(\,[V = A \setminus \{i\}]\,)$$

(ii) En déduire :

$$\mathbb{P}(\,[R = A]\,) \;=\; \frac{1}{\binom{n}{m}}\,\frac{\bar{x}_A}{\bar{x}}$$

8. Une fois choisi le groupe de clients R (par la procédure de la question ***12.***), on définit : $\hat{\theta}_R = \dfrac{\bar{y}_R}{\bar{x}_R}$.

a) Démontrer :

$$\mathbb{E}\left(\hat{\theta}_R\right) \;=\; \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{A \in \mathcal{P}_m} \frac{\bar{y}_A}{\bar{x}}$$

b) Conclure : $\mathbb{E}\left(\hat{\theta}_R\right) = \theta$. On a donc construit un estimateur non biaisé de θ.