DS5 (version A)

Exercice 1 (EDHEC 2020)

On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.
On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$, et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Démontrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. En effet : ${}^t0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = -0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

(iii) Démontrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$.
- × Comme $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, M vérifie : ${}^tM = -M$.
- × Comme $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, N vérifie : ${}^tN = -N$.

Démontrons : $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire : ${}^t\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big) = -\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big)$) . On a :

$$\begin{aligned} {}^t\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big) &= \lambda \cdot {}^tM + \mu \cdot {}^tN \\ &= \lambda \cdot (-M) + \mu \cdot (-N) \qquad \textit{(car } (M,N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2 \\ &= -\lambda \cdot M - \mu \cdot N \\ &= -\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big) \end{aligned}$$

On a bien : $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$ □

On considère une matrice A fixée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = ({}^tA)\, M + M\, A$$

2. a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer : $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire : ${}^t\big(f(M)\big) = -f(M)$).

$$\begin{aligned} {}^t\big(f(M)\big) &= {}^t\big(({}^tA)\, M + M\, A\big) \\ &= {}^t(({}^tA)M) + {}^t(M\, A) \qquad \textit{(par linéarité de la transposée)} \\ &= ({}^tM)\big({}^t({}^tA)\big) + ({}^tA)\, ({}^tM) \\ &= (-M)A + ({}^tA)\, (-M) \qquad \textit{(car } M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\textit{)} \\ &= -MA - ({}^tA)\, M = -f(M) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$ □

b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire
  Soit $(M, N) \in \big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big)^2$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) & = & ({}^tA)\,(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) + (\lambda \cdot M + \mu \cdot N)\,A \\ & = & \lambda \cdot ({}^tA)M + \mu \cdot ({}^tA)N + \lambda \cdot MA + \mu \cdot NA \\ & = & \lambda \cdot \big(({}^tA)M + MA\big) + \mu \cdot \big(({}^tA)M + MA\big) \\ & = & \lambda \cdot f(M) + \mu \cdot f(N) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est bien une application linéaire.}}$$

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
  D'après la question précédente, pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est bien à valeurs dans } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

□

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Il existe donc $(a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in \mathbb{R}^9$ tel que : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} M \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) & \Leftrightarrow & {}^tM = -M \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -a \\ d & = & -b \\ g & = & -c \\ b & = & -d \\ e & = & -e \\ h & = & -f \\ c & = & -g \\ f & = & -h \\ i & = & -i \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) & = & \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ \middle| \ a = 0,\ d = -b,\ g = -c,\ e = 0,\ h = -f,\ i = 0 \right\} \\
 & = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid (b,c,f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
 & = & \left\{ b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid (b,c,f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
 & = & \left\{ b \cdot J + c \cdot K + f \cdot L \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid (b,c,f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(J,K,L)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ains, } \mathscr{B} = (J,K,L) \text{ est bien une famille génératrice de } \mathcal{A}_3(\mathbb{R}).}$$

Commentaire

- On présente ici $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sous la forme d'un ensemble dont les éléments sont des matrices écrites à l'aide de paramètres. Cette forme permet de pouvoir écrire $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ comme espace vectoriel engendré par une partie.
- Il est relativement fréquent dans les sujets d'avoir à étudier des ensembles paramétrés. La méthode illustrée ci-dessus possède un double avantage. En effet, l'écriture $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\,(J,K,L)$ permet de conclure :
  - × que $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
  - × que la famille (J,K,L) est génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
- Ce dernier point est important pour exhiber une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
  - × si la famille (J,K,L) est libre, c'est alors une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
  - × sinon, si la famille (J,K,L) est liée, on peut extraire de (J,K,L) une base $\mathcal{G}$ de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. La famille $\mathcal{G}$ n'est autre que la famille (J,K,L) dans laquelle on a retiré tout vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de (J,K,L).

□

b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot J + \lambda_2 \cdot K + \lambda \cdot L = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. $(*)$

$$\begin{array}{rcl}
\text{Or :} \quad (*) & \Longleftrightarrow & \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
 & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
 & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{array} \right. \iff \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (J,K,L) \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est :
  - $\times$ génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
  - $\times$ libre.

  On en déduit que c'est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = \text{Card}(\mathscr{B}) = 3.}$$ □

4. a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

Démonstration.

- On a :
$$\begin{aligned} f(J) &= ({}^tA)\,J + J\,A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
$$\boxed{f(J) = -J - L}$$

- On a :
$$\begin{aligned} f(K) &= ({}^tA)\,K + K\,A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
$$\boxed{f(K) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

- On a :
$$\begin{aligned} f(L) &= ({}^tA)\,L + L\,A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
$$\boxed{f(L) = -L}$$ □

b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- On a démontré précédemment que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et (J, K, L) est en une base. Par caractérisation de l'image d'une application linéaire, on a :

$$\begin{array}{rcll} \text{Im}(f) & = & \text{Vect}\left(f(J), f(K), f(L)\right) & \\ & = & \text{Vect}\left(-J-L, 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}, -L\right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \text{Vect}\left(-J-L, -L\right) & \\ & = & \text{Vect}\left(-J, -L\right) & \textit{(on met à jour le } 1^{er} \textit{ vecteur en lui ajoutant l'opposé du } 2^{\text{ème}}) \\ & = & \text{Vect}\left(J, L\right) & \textit{(on met à jour les deux vecteurs en les multipliant tous les deux par } -1) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(J, L\right)}$$

- Ainsi la famille (J, L) :
  - × engendre $\text{Im}(f)$,
  - × est libre car constituée de deux matrices non colinéaires.

  On en conclut que la famille (J, L) est une base de $\text{Im}(f)$.

$$\boxed{\text{On en déduit finalement : } \dim\left(\text{Im}(f)\right) \ = \ \text{Card}\left((J, L)\right) \ = \ 2.}$$

Commentaire

- Comme $\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(-J-L, -L\right)$, la famille $(-J-L, -L)$ est génératrice de $\text{Im}(f)$. On aurait ainsi pu terminer la question avec cette famille. Cependant, c'est plutôt un bon réflexe que de simplifier la famille génératrice obtenue. Pour se faire, il est primordial de connaître précisément les opérations qui ne modifient pas l'espace vectoriel engendré par la famille étudiée.
- L'énoncé stipule que la base obtenue ne doit que contenir des matrices de $\mathscr{B}$. C'est donc certainement la forme (J, L) qui était attendue ici.
- Notons enfin que l'on pouvait démontrer le caractère libre en rappelant que (J, L) est une sous-famille de la famille (J, K, L) qui est libre en tant que base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

□

c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis en donner une base.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim\left(\text{Ker}(f)\right) & + & \dim\left(\text{Im}(f)\right) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim\left(\text{Ker}(f)\right) = 3 - 2 = 1.}$$

- De plus, d'après ce qui précède : $f(K) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{D'où : } K \in \text{Ker}(f).}$$

- Ainsi, la famille (K) est :
  $\times$ une famille libre de $\text{Ker}(f)$, car constituée uniquement d'une matrice non nulle,
  $\times$ telle que : $\text{Card}\big((K)\big) \ = \ 1 \ = \ \dim\big(\text{Ker}(f)\big)$.

  On en déduit que la famille (K) est une base de $\text{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{En particulier : } \text{Ker}(f) = \text{Vect}\,(K).}$$ □

5. a) Écrire la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1, 0\}$.

Démonstration.

- D'après ce qui précède : $f(J) = (-1) \cdot J + 0 \cdot K + (-1) \cdot L$.
  On en conclut : $\text{Mat}_{(J,K,L)}\big(f(J)\big) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- D'après ce qui précède : $f(K) = 0 \cdot J + 0 \cdot K + 0 \cdot L$.
  On en conclut : $\text{Mat}_{(J,K,L)}\big(f(K)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- D'après ce qui précède : $f(L) = 0 \cdot J + 0 \cdot K + (-1) \cdot L$.
  On en conclut : $\text{Mat}_{(J,K,L)}\big(f(J)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } F = \text{Mat}_{(J,K,L)}\big(f\big) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$ □

b) En déduire les valeurs propres de f.

Démonstration.
La matrice F étant triangulaire (inférieure), ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. Ainsi : $\text{Sp}(F) = \{-1, 0\}$.

$$\boxed{\text{Comme } F = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f), \text{ on en conclut : } \text{Sp}(f) = \text{Sp}(F) = \{-1, 0\}.}$$ □

c) On note id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer le rang de $f + \text{id}$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \text{rg}(f + \text{id}) & = & \text{rg}(A + I) & \textit{(car } F \textit{ et } I \textit{ sont les représentations matricielles dans la base } \mathscr{B} \textit{ des endomorphismes } f \textit{ et } \text{id)} \\ & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & \\ & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) & \\ & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \ = \ 2 & \end{array}$$

La dernière égalité est vérifié car la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre (constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires).

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{rg}(f + \mathrm{id}) = 2.}$$

- Comme $f + \mathrm{id}$ est un endomorphisme de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, on a, d'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim\big(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})\big)}_{=\,3} = \dim\big(\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})\big) + \underbrace{\dim\big(\mathrm{Im}(f + \mathrm{id})\big)}_{=\,2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 3 - 2 = 1.}$$

- On a démontré précédemment : $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 0\}$. Or :

$$\dim\big(E_0(f)\big) + \dim\big(E_{-1}(f)\big) = 1 + 1 = 2 \neq \dim\big(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})\big)$$

$$\boxed{\text{On en conclut que l'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Dans cette dernière question, on démontre que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable. Il n'existe donc pas de base dans laquelle la matrice représentant f est diagonale.
- Dans ce cas, on se rabat sur une propriété plus faible : existe-t-il une base dans laquelle la représentation matricielle de f serait triangulaire supérieure ? Cette propriété est beaucoup plus simple à obtenir, notamment si l'on accepte d'utiliser des matrices dont les coefficients sont complexes (hors de notre portée en ECE).
  On parle alors de **trigonaliser** (on dit aussi **triangulariser**) la matrice A.
- Considérons un espace vectoriel E de dimension finie.
  Si un endomorphisme $f : E \to E$ est triangularisable, comment le triangularise-t-on ?
  Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de f. On cherche alors une base de chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ et on considère la famille obtenue en concaténant toutes ces bases.
  Cette famille `N'EST PAS` une base de E. Si tel était le cas, on aurait formé une base de vecteurs prores et donc E serait diagonalisable.
  Par contre, cette famille est libre. On peut alors la compléter en une base de E.
  Sans entrer dans les détails, on peut faire en sorte (en choisissant correctement les vecteurs qu'on ajoute) que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ soit triangulaire supérieure.
- C'est la méthode développée dans cet exercice, même si elle est un peu cachée. Ici, f a deux valeurs propres : 0 et -1. De plus :
  × le sous-espace propre $E_0(f)$ a pour base la famille (K).
  × le sous-espace propre $E_{-1}(f)$ a pour base la famille (L).
    En effet, comme $f(L) = -L$, on a : $L \in E_{-1}(f)$ et ainsi : $\mathrm{Vect}\,(L) \subset E_{-1}(f)$.
    On conclut : $\mathrm{Vect}\,(L) = E_{-1}(f)$ par égalité des dimensions de ces deux espaces vectoriels (puisqu'on a démontré : $\dim\big(E_{-1}(f)\big) = 1$).

  La famille (K, L) est une famille libre de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ car elle est constituée de deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.
  On complète alors cette famille en une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ en lui adjoignant le vecteur J. La matrice représentative de f dans la base (J, K, L) obtenue est triangulaire (inférieure). □

Exercice 2 (EDHEC 2019)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$, et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

Commentaire

- Formellement, l'événement N_n n'est pas défini dans cet énoncé. Il aurait fallu ajouter :

  on note N_n l'événement : « le $n^{\text{ème}}$ tirage donne la boule noire »

- Notons au passage qu'on ne définit pas non plus l'événement B_n : « le $n^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche ». Ce n'est pas primordial ici puisque $B_n = \varnothing$ (comme l'urne ne contient que $n-1$ boules blanches et qu'on procède sans remise, on ne peut piocher une boule blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage).
- On peut enfin remarquer : $N_n \cancel{=} \overline{B_n}$.
  En effet : $\overline{B_n} = \overline{\varnothing} = \Omega$ est toujours réalisé mais ce n'est pas le cas de N_n.
  Par exemple, la boule noire peut être piochée lors du 1^{er} tirage.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

Démonstration.
L'urne contient n boules dont une seule est noire. Le tirage s'effectuant sans remise, la boule noire apparaît au pire lors du $n^{\text{ème}}$ tirage dans l'urne. Elle peut aussi apparaître lors de n'importe quel autre tirage précédent.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$

□

2. a) Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![2, n-1]\!]$.

Si l'événement $B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}$ est réalisé, c'est qu'une boule blanche a été piochée lors des $i-1$ premiers tirages dans l'urne. À l'issue de ces tirages, l'urne est alors constituée de $(n-\cancel{1})-(i-\cancel{1}) = n-i$ boules blanches et de la boule noire (l'urne contient donc $n-i+1$ boules en tout).

Dans ce cas, l'événement B_i est réalisé si et seulement si le $i^{\text{ème}}$ tirage amène une boule blanche. Autrement dit, si l'on obtient l'une des $n-i$ boules non encore piochées. Chaque boule étant piochée de manière équiprobable :

$$\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![2, n-1]\!], \ \ \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}.}$$

□

b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $\mathbb{P}\big([X=k]\big)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Deux cas se présentent.

- Si $k=1$, alors : $[X=1]=N_1$.
  On rappelle que l'urne contient n boules dont 1 noire.

  $$\boxed{\text{Chaque boule étant piochée de manière équiprobable : } \mathbb{P}\big([X=k]\big) = \frac{1}{n}.}$$

- Si $k \in [\![2,n]\!]$, alors l'événement $[X=k]$ est réalisé si et seulement si on a pioché successivement $(k-1)$ boules blanches puis une noire. Ainsi :

  $$[X=k] \ = \ B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k$$

  On en déduit par la formule des probabilités composées :

  $$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\big([X=k]\big) \\ = & \mathbb{P}\big(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k\big) \\ = & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times \mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k) \\ = & \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n-2}{n-1} \times \dfrac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \dfrac{n-(k-1)}{n-(k-1)+1} \times \dfrac{1}{n-k+1} \end{array}$$

  Précisons cette dernière égalité :
  × $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}\left(\overline{N_1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$.
  × $\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$ car chaque boule a même probabilité d'être tirée.
  Plus précisément, si l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}$ est réalisé, c'est que les $k-1$ permiers tirages ont donné une boule blanche.
  Dans ce cas, l'événement N_k est réalisé si et seulement si lors du $k^{\text{ème}}$ tirage la boule noire est tirée dans l'urne contenant $n-k+1$ boules.

  Finalement, en procédant à des simplifications successives, on obtient :

  $$\mathbb{P}\big([X=k]\big) \ = \ \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\big([X=k]\big) \ = \ \frac{1}{n}.}$$ □

c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :
  × $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
  × $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([X=k]\big) \ = \ \dfrac{1}{n}$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!]).}$$

- On en déduit que X admet une espérance et une variance.

  $$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \ \text{ et } \ \mathbb{V}(X) = \frac{(n-1)(n+1)}{12}.}$$

Commentaire

Une bonne connaissance du cours est une condition *sine qua non* de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours. En l'occurrence, il s'agit ici simplement de connaître les caractéristiques d'une loi usuelle.

$\square$

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente et qui vaut 0 sinon.

a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$\mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y = 0] \big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

- Remarquons tout d'abord :

	L'événément $[X = k] \cap [Y = 0]$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	L'événément $[X = k]$ est réalisé	et	l'événement $[Y = 0]$ est réalisé
$\Leftrightarrow$	On a effectué k tirages (la boule noire a été obtenue lors du $k^{\text{ème}}$ tirage)	et	la boule blanche numérotée 1 n'a pas été piochée lors de l'expérience

On en déduit :

$$[X = k] \cap [Y = 0] \;=\; B_1^{(0)} \cap \ldots \cap B_{k-1}^{(0)} \cap N_k$$

Où l'on a noté, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $B_i^{(0)}$ l'événément « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche numérotée 0 » (en particulier, $B_{n-1}^{(0)} = \varnothing$).

- On en déduit par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big([X = k] \big) \\
= \;& \mathbb{P}\big(B_1^{(0)} \cap \ldots \cap B_{k-1}^{(0)} \cap N_k\big) \\
= \;& \mathbb{P}\big(B_1^{(0)}\big) \times \mathbb{P}_{B_1^{(0)}}\big(B_2^{(0)}\big) \times \mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap B_2^{(0)}}\big(B_3^{(0)}\big) \times \;\cdots\; \times \mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap \cdots \cap B_{k-2}^{(0)}}\big(B_{k-1}^{(0)}\big) \times \mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap \cdots \cap B_{k-1}^{(0)}}(N_k) \\
= \;& \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \;\cdots\; \times \frac{(n-\cancel{2}) - (k-\cancel{2})}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1}
\end{aligned}$$

Précisons cette dernière égalité :

$\times$ $\mathbb{P}\big(B_1^{(0)}\big) = \dfrac{n-2}{n}$ car chaque boule a même probabilité d'être tirée et que l'urne contient initialement n boules dont $(n-2)$ sont blanches et numérotées 0.

$\times$ $\forall i \in [\![2, n-1]\!]$, $\mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap \cdots \cap B_{i-1}^{(0)}}\big(B_i^{(0)}\big) = \dfrac{n-i-1}{n-i+1}$.

En effet, si les $i-1$ premiers tirages ont donné une boule blanche numérotée 0, il reste $n - (i-1) = n - i + 1$ boules dans l'urne dont $(n-2) - (i-1) = n - i - 1$ blanches numérotées 0.

$\times$ $\mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap \cdots \cap B_{k-1}^{(0)}}(N_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$ en procédant comme à la question précédente.

- Dans le produit précédent, les termes apparaissant au numérateur se simplifient avec les termes présents au dénominateur de la fraction présente deux rangs après.

Après simplification, on obtient : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\big([X=k] \cap [Y=0]\big) = \dfrac{n-k}{n(n-1)}$.

Commentaire

Comme $Y(\Omega) = \{0,1\}$, on obtient à l'aide du système complet d'événements $\big([Y=0], [Y=1]\big)$:

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\big([X=k] \cap [Y=1]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([X=k] \cap [Y=0]\big) = 1 - \frac{n-k}{n(n-1)}$$

On obtient ainsi la loi du couple (X,Y), c'est à dire la valeur de $\mathbb{P}\big([X=k] \cap [Y=\ell]\big)$ pour $k \in X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et $\ell \in Y(\Omega) = \{0,1\}$. □

b) En déduire $\mathbb{P}\big([Y=0]\big)$.

Démonstration.
La famille $\big([X=k]\big)_{k\in[\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
D'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y=0]\big) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X=k] \cap [Y=0]\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n\,(n-1)} \\
&= \frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (n-k) \\
&= \frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{j=0}^{n-1} j && \textit{(à l'aide du décalage d'indice } j=n-k\textit{)} \\
&= \frac{1}{n\,(n-1)} \frac{n\,(n-1)}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([Y=0]\big) = \frac{1}{2}}$$

Commentaire

- Le changement d'indice $j = n-k$ est en fait une sommation dans l'autre sens :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\sum\limits_{k=1}^{n} (n-k) & = & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & (n-(n-1)) & + & (n-n) \\
& = & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 1 & + & 0 \\
\sum\limits_{j=0}^{n-1} j & = & 0 & + & 1 & + & \cdots & + & (n-2) & + & (n-1)
\end{array}$$

- Il n'est pas envisageable de ne pas savoir comment traiter cette question : déterminer une loi marginale (la valeur de $\mathbb{P}\big([Y=1]\big)$ peut se déduire de $\mathbb{P}\big([Y=0]\big)$) à partir d'une loi de couple est une méthode classique qu'il faut parfaitement connaître. □

c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Comme $Y(\Omega) = \{0, 1\}$, on obtient à l'aide du système complet d'événements $\big([Y = 0], [Y = 1] \big)$:

$$\mathbb{P}\big([Y = 0] \big) + \mathbb{P}\big([Y = 1] \big) \quad = \quad 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([Y = 1] \big) = 1 - \mathbb{P}\big([Y = 1] \big) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.}$$

- Finalement :
  × $Y(\Omega) = \{0, 1\}$,
  × $\mathbb{P}\big([Y = 0] \big) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}\big([Y = 1] \big) = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } Y \text{ admet une espérance et une variance. De plus :} \\ \mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{2} \quad \text{ et } \quad \mathbb{V}(Y) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}.\end{array}}$$

□

4. Simulation informatique.
On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'uin', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme $[\![a, b]\!]$.

a) Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X.
On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB + 1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
1  n = input('Entrez une valeur pour n : ')
2  nB = n-1
3  X = 1
4  u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
5  while u < nB + 1
6      nB = ----
7      u = grand(1, 1, 'uin', 1, ----)
8      X = ----
9  end
10 disp(X, 'La boule noire est apparue au tirage numéro')
```

Démonstration.
Détaillons les différents éléments de ce programme.

- En ligne 1, on récupère la valeur de `n`, variable qui contiendra le nombre de boules, à l'aide d'une dialogue avec l'utilisateur.

```
1  n = input('Entrez une valeur pour n : ')
```

- On initialise alors la variable `X` qui contiendra la valeur prise par X pour la succession de tirages simulés et la variable `nB` qui contient le nombre de boules blanches.

```
2  nB = n-1
3  X = 1
```

- On simule ensuite un premier tirage dans l'urne. Pour ce faire, on considère initialement que les boules sont numérotées de 1 à n. Les boules blanches sont numérotées 1 à $n-1$ sont les boules blanches et la boule noire est numérotée n.

```
4  u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
```

  Plus précisément, on stocke dans la variable `u` le résultat de la simulation d'une v.a.r. U qui suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, \texttt{nB + 1} \rrbracket)$. On obtient ainsi un entier choisi aléatoirement entre 1 et `nB+1`, variable contenant le nombre de boules en tout dans l'urne.

- S'ensuit une structure itérative permettant de simuler la succession de tirages tant que la boule noire n'a pas été tirée.
  - × La ligne 4 permet de réaliser l'itération tant que la valeur de `u` est différente de celle de `nB+1` (on peut le faire grâce à l'inégalité de la ligne 5 car `u` prend sa valeur dans $\llbracket 1, \texttt{nB+1} \rrbracket$). Il faut donc comprendre que la boule noire est numérotée `nB+1` tout au long du programme.

```
5  while u < nB + 1
```

  - × En ligne 5, on met à jour le nombre de boules dans l'urne après avoir procédé au tirage.

```
6      nB = nB - 1
```

  - × Puis on procède à un nouveau tirage.

```
7      u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
```

    Il faut comprendre que l'on renumérote à chaque tirage les boules dans l'urne. Si initialement l'urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5, on considère que les boules dont le numéro est dans $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ sont blanches et que la boule 5 est noire. Si on tire la boule 2, alors il ne reste plus que 4 boules dans l'urne dont 3 blanches qu'on peut alors renuméroter 1, 2 et 3. La boule noire est alors numérotée 4.
  - × Enfin, on met à jour la variable `X` qui compte le nombre de tirages faits jusqu'à présent.

```
8      X = X + 1
9  end
```

  Finalement, on obtient le programme complet suivant.

```
1  n = input('Entrez une valeur pour n : ')
2  nB = n-1
3  X = 1
4  u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
5  while u < nB + 1
6      nB = nB - 1
7      u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
8      X = X + 1
9  end
10 disp(X, 'La boule noire est apparue au tirage numéro')
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procédera de même dans les autres questions **Scilab**.

□

b) Compléter les lignes 4 et 9 ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par X, la valeur prise par Y.

```
1  n = input('Entrez une valeur pour n : ')
2  nB = n-1
3  X = 1
4  Y = ----
5  u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
6  while u < nB + 1
7      nB = ----
8      if u == 1 then
9          Y = ----
10     end
11     u = grand(1, 1, 'uin', 1, ----)
12     X = ----
13 end
14 disp(X, 'La boule noire est apparue au tirage numéro ')
15 disp(Y, 'La valeur de Y est ')
```

Démonstration.

- Il s'agit de simuler la v.a.r. Y. On crée la variable Y, destinée à contenir la valeur prise par Y lors de la simulation. On initialise Y à 0 puisqu'avant les tirages, la boule 1 n'a pas encore été piochée.

```
4  Y = 0
```

- Il faut alors tester, pour chaque tirage simulé (à chaque tour de boucle) si l'on a obtenu la boule numérotée 1. La structure conditionnelle du programme permet justement de tester si la variable u, qui contient le numéro de la boule tirée, vaut 1. Si c'est le cas, c'est qu'on a tiré la boule 1. Il faut alors mettre à jour la variable Y en conséquence.

```
8      if u == 1 then
9          Y = 1
10     end
```

Commentaire

- Il faut bien comprendre qu'à chaque simulation de tirage on procède à une renumérotation des boules. Reprenons l'exemple détaillé précédemment. Initialement l'urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. La boule 5 est noire et les autres blanches. La boule 1 porte l'inscription 1 et les boules 2, 3 et 4 portent l'inscription 0. Imaginons les tirages suivants :
  - × si on tire la boule 2, alors les 4 boules restantes dans l'urne sont renumérotées de 1 à 4. La 4 est la noire, les boules 1, 2, 3 sont blanches et c'est la 1 qui portent l'inscription 1.
  - × si on tire enstuie la boule 1, alors on renumérote les boules : la 3 est la noire, les boules 1 et 2 sont blanches portent toutes deux l'inscription 0.
  - × si on tire ensuite la boule 1, alors on renumérote les boules : la 2 est la noire, la 1 est blanche et porte l'inscription 0.

  Cette série de tirages, permet de comprendre que la renumérotation peut provoquer plusieurs tirages successifs de boules boules 1. Mais celles-ci ne sont pas considérées comme portant l'inscription 1 tout au long du programme.
- Il est à noter que seule la première mise à jour de Y a un effet : si la variable Y contient 1, les mises à jour suivantes écrasent cette valeur pour la remplacer par 1. □

Exercice 3 (EML 2013)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès $\frac{1}{n}$ (probabilité d'obtenir la boule numérotée i dans l'urne $\mathcal{U}$ de manière équiprobable parmi les n boules disponibles).
- La variable X_i correspond au nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi : } X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{1}{n}\right).}$$

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(X_i) = k \times \frac{1}{n} = \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_i) = k \times \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right).}$$

□

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

- On commence par remarquer :
$$[X_i = k] \cap [X_j = k] = \varnothing$$
En effet, en k tirages, on ne peut pas obtenir à la fois k fois la boule numéro i et k fois la boule numéro j. On obtient donc :
$$\mathbb{P}([X_i = k] \cap [X_j = k]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
- D'autre part, d'après la question ***1.***, on sait que :
$$\mathbb{P}([X_i = k]) = \mathbb{P}([X_j = k]) = \binom{k}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-k} = 1 \times \frac{1}{n^k} \times 1 = \frac{1}{n^k}$$
Donc :
$$\mathbb{P}([X_i = k])\, \mathbb{P}([X_j = k]) = \frac{1}{n^k} \times \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n^{2k}} \neq 0$$

On obtient finalement :
$$\mathbb{P}([X_i = k] \cap [X_j = k]) \neq \mathbb{P}([X_i = k])\, \mathbb{P}([X_j = k])$$

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

- On cherche ici à démontrer que les v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ ne sont pas mutuellement indépendantes. Si elles l'étaient, alors toute paire de variables X_i, X_j (avec $i \neq j$) serait indépendante :

$$\begin{array}{c} X_1, \dots, X_n \text{ mutuellement} \\ \text{indépendantes} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} X_1, \dots, X_n \text{ indépendantes} \\ \text{deux à deux} \end{array}$$

- Ainsi, en démontrant que les v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ ne sont pas deux à deux indépendantes, on démontre qu'elles ne sont pas mutuellement indépendantes. On utilise en fait la contraposée de l'implication précédente :

$$\begin{array}{c} X_1, \dots, X_n \texttt{ NON} \\ \text{indépendantes deux à deux} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} X_1, \dots, X_n \texttt{ NON} \\ \text{mutuellement indépendantes} \end{array}$$

□

3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès $\frac{2}{n}$ (probabilité d'obtenir la boule numérotée i ou la boule numérotée j dans l'urne $\mathcal{U}$ de manière équiprobable parmi les n boules disponibles).
- La variable $X_i + X_j$ correspond au nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi : } X_i + X_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{2}{n}\right)}$$

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{V}(X_i + X_j) = k \times \frac{2}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right).}$$

□

b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Démonstration.
D'après la formule de la variance d'une somme de variables aléatoires, on obtient :

$$\mathbb{V}(X_i + X_j) = \mathbb{V}(X_i) + 2\ \mathrm{Cov}(X_i, X_j) + \mathbb{V}(X_j)$$

Donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) & = & \frac{1}{2}\left(\mathbb{V}(X_i + X_j) - \mathbb{V}(X_i) - \mathbb{V}(X_j)\right) \\ & = & \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}\,k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \cancel{2}\,\frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \quad \textit{(d'après \textbf{1.} et \textbf{3.a)})} \\ & = & \frac{k}{n}\left(\cancel{1} - \frac{2}{n} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{n}\right)\right) \\ & = & \frac{k}{n} \times \left(-\frac{1}{n}\right) \ = \ -\frac{k}{n^2} \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{k}{n^2}}$$

□

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II

4. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.

Démonstration.

- Si $k = 1$, alors on effectue un unique tirage. On ne peut donc obtenir qu'un seul numéro (celui de la boule choisie à cet unique tirage). Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1(\Omega) = \{1\} \\ \mathbb{P}([Z_1 = 1]) = 1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z_1 \text{ suit la loi certaine égale à 1 et : } \mathbb{E}(Z_1) = 1.}$$

- Déterminons maintenant la loi de la variable Z_2.
  - × Tout d'abord : $Z_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
    En effet, en $k = 2$ tirages, on peut :
    - soit obtenir deux fois la même boule, on observe alors 1 seul numéro.
    - soit obtenir deux boules différentes, on observe alors 2 numéros distincts.
  - × On déduit du premier item du point précédent :

$$[Z_2 = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} [X_i = 2]$$

Les événements $[X_1 = 2]$, ..., $[X_n = 2]$ sont incompatibles. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z_2 = 1]) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = 2]) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{2}{2} \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2-2} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\ & = & \cancel{n} \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}} \; = \; \dfrac{1}{n} & \end{array}$$

  - × La famille $([Z_2 = 1], [Z_2 = 2])$ est un système complet d'événements. D'où :

$$\mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([Z_2 = 1]) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} Z_2(\Omega) = \{1, 2\} \\ \mathbb{P}([Z_2 = 1]) = \dfrac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \dfrac{1}{n} \end{array} \right.}$$

  - × La v.a.r. Z_2 admet une espérance, car c'est une v.a.r. finie. De plus :

$$\mathbb{E}(Z_2) = 1 \times \mathbb{P}([Z_2 = 1]) + 2 \times \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = \frac{1}{n} + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_2) = 2 - \frac{1}{n}}$$

□

5. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

a) Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$ et déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$.

Démonstration.

- L'événement $[Z_k = 1]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu un seul numéro lors de k tirages. Autrement dit lorsqu'on a tiré la même boule lors des k tirages. Ainsi :

$$[Z_k = 1] \;=\; \bigcup_{i=1}^{n} [X_i = k]$$

Comme les événements $[X_1 = k]$, ..., $[X_n = k]$ sont incompatibles, on obtient :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z_k = 1]) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = k]) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{k}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-k} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\ & = & n\,\frac{1}{n^k} \;=\; \frac{1}{n^{k-1}} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \frac{1}{n^{k-1}}}$$

- Deux cas se présentent pour le calcul de $\mathbb{P}([Z_k = k])$:
  - si $k > n$, alors : $[Z_k = k] = \varnothing$.
    En effet, on ne peut obtenir strictement plus de n boules différentes lors de k tirages successifs dans une urne contenant n boules.

    $$\boxed{\text{Si } k > n \text{ alors : } \mathbb{P}([Z_k = k]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.}$$

  - si $k \leqslant n$.
    L'univers Ω est muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On procède alors par dénombrement.

    L'univers Ω est l'ensemble des k-uplets d'éléments de $[\![1, n]\!]$. D'où : $\text{Card}(\Omega) = n^k$.

    Un k-tirage qui réalise l'événement $[Z_k = k]$ est un k-tirage lors duquel on a obtenu k boules distinctes. Un tel k-tirage est entièrement déterminé par :

    × le numéro de la première boule : n possibilités,

    × le numéro de la deuxième boule : $n - 1$ possibilités,

    × $\cdots$

    × le numéro de la $k^{\text{ème}}$ boule : $n - (k - 1)$ possibilités.

    Il y a donc en tout : $n \times (n-1) \times \cdots \times (n - (k-1)) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ tels k-tirages.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}([Z_k = k]) = \frac{\text{Card}([Z_k = k])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!}\,\frac{1}{n^k}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}([Z_k = k]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \dfrac{n!}{(n-k)!}\,\dfrac{1}{n^k} & \text{si } k \leqslant n \end{cases}.}$$

Commentaire

- La première étape de la question consiste à écrire $[Z_k = 1]$ comme une réunion d'événements plus simples. On ne raisonne sur les probabilités qu'après avoir effectué cette étape primordiale de décomposition de l'événement.
- On pouvait également mettre en place un dénombrement pour répondre à la première question. Détaillons cette rédaction.

  Un k-tirage qui réalise $[Z_k = 1]$ est un k-tirage lors duquel la même boule a toujours été tirée. Un tel k-tirage est entièrement déterminé par :

  × le numéro de la boule qui est toujours tirée : n possibilités.

  Ainsi, il y a n tels k-tirages.
  On en conclut que : $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \dfrac{\text{Card}([Z_k = k])}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{n}{n^k} = \dfrac{1}{n^{k-1}}$.
- On peut aussi faire la deuxième démonstration à l'aide des termes du chapitre dénombrement. L'événement $[Z_k = k]$ est réalisé par tous les k-tirages lors desquels on a obtenu k numéros distincts. Un tel k-tirage est un k-uplet d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.
  Autrement dit, un tel k-tirage est un k-arrangement de $[\![1, n]\!]$.
  Ainsi : $\text{Card}([Z_k = k]) = A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

□

b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \dfrac{n - \ell + 1}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$.

Démonstration.

- On remarque que $Z_k(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$.
  En effet, en k tirages, on peut obtenir :
  × au minimum 1 seule boule distincte (on obtient la même boule aux k tirages),
  × au maximum n boules distinctes (on a obtenu toutes les boules de l'urne).
  Ce cas ne peut se produire que lorsque $k \geqslant n$.
- La famille $\Big([Z_k = i] \Big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell])$$

- Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$ et soit $i \in [\![1, n]\!]$. Étudions l'événement $[Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]$.
  Cet événement est réalisé si et seulement si les événements $[Z_k = i]$ et $[Z_{k+1} = \ell]$ sont tous les deux réalisés. L'événement $[Z_k = i]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu i numéros distincts lors des i tirages. Lorsqu'on procède à 1 tirage supplémentaire, deux cas se présentent :
  × soit on tire un numéro de boule déjà obtenu lors des k premiers tirages.
  Dans ce cas, au cours de ces $k + 1$ premiers tirages, on a obtenu i numéros distincts.
  L'événement $[Z_{k+1} = i]$ est alors réalisé.
  × soit on tire un numéro non obtenu lors des k premiers tirages.
  Dans ce cas, au cours de ces $k + 1$ premiers tirages, on a obtenu $i + 1$ numéros distincts.
  L'événement $[Z_{k+1} = i + 1]$ est alors réalisé.

  Ainsi, l'événement $[Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]$ n'est réalisé que si $i = \ell$ ou $i + 1 = \ell$.

$$\boxed{\text{Pour tout } i \neq \ell \text{ et } i \neq \ell - 1 : [Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell] = \varnothing.}$$

- Ainsi, pour tout $\ell \in [\![2, n]\!]$ (on écarte le cas $\ell = 2$ pour assurer que $\ell - 1 \geqslant 1$) :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]) & \\
& = & \sum\limits_{i=\ell-1}^{\ell} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]) & \\
& = & \sum\limits_{i=\ell-1}^{\ell} \mathbb{P}([Z_k = i])\ \mathbb{P}_{[Z_k=i]}([Z_{k+1} = \ell]) & \textit{(avec } \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1]) \neq 0 \\
& & & \textit{et } \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \neq 0\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])\ \mathbb{P}_{[Z_k=\ell-1]}([Z_{k+1} = \ell]) + \mathbb{P}([Z_k = \ell])\ \mathbb{P}_{[Z_k=\ell]}([Z_{k+1} = \ell]) &
\end{array}$$

Il reste alors à déterminer chacune de ces deux probabilités conditionnelles.

× Si l'événement $[Z_k = \ell - 1]$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu $\ell - 1$ boules distinctes au cours des k premiers tirages. Alors, l'événement $[Z_{k+1} = \ell]$ est réalisé si et seulement si on a pioché au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage un numéro distinct des $\ell - 1$ numéros déjà obtenus lors les k tirages précédents. Il y a $n - (\ell - 1)$ tels numéros.

> Chacune des n boules ayant la même probabilité d'être tirée, on obtient :
> $$\mathbb{P}_{[Z_k=\ell-1]}([Z_{k+1} = \ell]) = \frac{n - \ell + 1}{n}$$

× Si l'événement $[Z_k = \ell]$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu ℓ boules distinctes au cours des k premiers tirages. Alors l'événement $[Z_{k+1} = \ell]$ est réalisé si et seulement si on a pioché au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage l'une des ℓ numéros déjà obtenus lors des k tirages précédents. Il y a ℓ tels numéros.

> Chacune des n boules ayant la même probabilité d'être tirée, on obtient :
> $$\mathbb{P}_{[Z_k=\ell]}([Z_{k+1} = \ell]) = \frac{\ell}{n}$$

- En combinant ces deux résultats, on obtient la fomule souhaitée.

> Pour tout $\ell \in [\![2, n]\!]$, $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \dfrac{n - \ell + 1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$

- Il reste alors à vérifier que la formule reste vraie si $\ell = 1$.

× D'une part, d'après la question ***5.a)*** :

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) \ = \ \frac{1}{n^k} \ = \ \frac{1}{n}\ \frac{1}{n^{k-1}} \ = \ \frac{1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = 1])$$

× Enfin, comme $[Z_k = 0] = \varnothing$, on a : $\mathbb{P}([Z_k = 0]) = 0$. D'où :

$$\frac{1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = 1]) + \frac{n - 1 + 1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = 0]) \ = \ \frac{1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = 1])$$

> Ainsi, la formule est aussi vérifiée pour $\ell = 1$.

□

c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\,\mathbb{E}(Z_k) + 1$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.b)***, $Z_k(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$, et $Z_{k+1}(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$.
  Ainsi, Z_k et Z_{k+1} sont des v.a.r. finies. Elles admettent donc une espérance.
- Par définition de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(Z_{k+1}) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \ell\ \mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \ell \left(\frac{\ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \frac{n-\ell+1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell-1])\right) && \textit{(d'après } \textbf{5.b)}\textit{)} \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell(n-\ell+1)}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell-1]) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(\ell+1)(n-(\ell+\cancel{1})+\cancel{1})}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(\ell+1)(n-\ell)}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{n\ell-\ell^2+n-\ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) && \textit{(car } [Z_k = 0] = \varnothing\textit{)} \\
= \ & \left(\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \frac{n^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = n])\right) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{(n-1)\ell-\ell^2+n}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= \ & \frac{n^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = n]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\cancel{\ell^2}+(n-1)\ \ell-\cancel{\ell^2}+n}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= \ & n\ \mathbb{P}([Z_k = n]) + \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= \ & \left((n-1)\ \mathbb{P}([Z_k = n]) + \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell\ \mathbb{P}([Z_k = \ell])\right) + \left(\mathbb{P}([Z_k = n]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z_k = \ell])\right) \\
= \ & \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \ell\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \ = \ \frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(Z_k) + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathbb{E}(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(Z_k) + 1}$$

□

6. a) Montrer que la suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$. D'après la question ***5.c)***, on obtient :

$$v_{k+1} = \mathbb{E}(Z_{k+1}) - n = \frac{n-1}{n}\,\mathbb{E}(Z_k) + 1 - n = \frac{n-1}{n}\,\mathbb{E}(Z_k) - (n-1) = \frac{n-1}{n}\,(\mathbb{E}(Z_k) - n) = \frac{n-1}{n}\, v_k$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_k)_{k\geqslant 1} \text{ est géométrique de raison } \frac{n-1}{n}.}$$

Commentaire

Cette question est l'occasion de faire un point sur la notion de variable muette.
Dans une expression mathématique, on dit qu'une variable est **muette** (on parle aussi de variable **liée**) si elle est portée par un quantificateur ou un symbole mathématique qui permet d'introduire la variable et son ensmble d'appartenance.

- Ainsi, dans l'expression « $(v_k)_{k \geqslant 1}$ », la variable k est muette (k parcourt $\mathbb{N}^*$). On peut la renommer sans que cela change l'objet considéré :

$$(v_i)_{i \geqslant 1} \qquad (v_\ell)_{\ell \geqslant 1} \qquad (v_m)_{m \geqslant 1}$$

- Par contre, dans l'expression $\dfrac{n-1}{n}$, la variable n n'est sous la portée d'aucun quantificateur ou symbole mathématique. L'objet $\dfrac{n-1}{n}$ dépend donc de ce n particulier. On dit que la variable n est **libre**.

Les deux objets ci-dessus (la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ et sa raison, le réel $\dfrac{n-1}{n}$) :

- ne dépendent pas de la variable k (muette),
- dépendent de la variable n (libre).

$\square$

b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n \left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$.

- D'après la question ***6.a)***, la suite (v_k) est géométrique de raison $\dfrac{n-1}{n}$, donc :

$$v_k = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} v_1$$

Or $v_1 = \mathbb{E}(Z_1) - n = 1 - n = -(n-1)$ d'après la question ***4.*** D'où :

$$v_k = -(n-1) \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = -(n-1) \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}} = -\frac{(n-1)^k}{n^{k-1}} = -n\, \frac{(n-1)^k}{n^k} = -n \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

- Par définition, $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$, donc :

$$\mathbb{E}(Z_k) = v_k + n = -n \left(\frac{n-1}{n}\right)^k + n = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{E}(Z_k) = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)}$$

$\square$

Problème (EDHEC 2020)

On convient que, pour tout réel x, on a : $x^0 = 1$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^n}{(1+x)^2}$ est continue sur le **segment** $[0,1]$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ de :
  - × $f_1 : x \mapsto x^n$ continue sur $[0,1]$ en tant que fonction polynomiale,
  - × $f_2 : x \mapsto (1+x)^2$
    - continue sur $[0,1]$ en tant que fonction polynomiale,
    - qui `NE S'ANNULE PAS` sur $[0,1]$

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } I_n \text{ est bien définie.}}$$

- De même, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x}$ est continue sur le **segment** $[0,1]$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } J_n \text{ est bien définie.}}$$

□

2. Calculer I_0 et I_1.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{(1+x)^2}\, dx = \int_0^1 (1+x)^{-2}\, dx = \left[\frac{1}{-2+1}\, (1+x)^{-2+1} \right]_0^1 = -\left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+0} \right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } I_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.}$$

- Ensuite :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^1}{(1+x)^2}\, dx$$

On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & \dfrac{1}{(1+x)^2} & & v(x) & = & -\dfrac{1}{1+x} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

On obtient :

$$\begin{array}{rcl} I_1 & = & \left[\, x \times \left(-\dfrac{1}{1+x}\right) \,\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 1 \times \left(-\dfrac{1}{1+x}\right) \, dx \\ & = & -\dfrac{1}{1+1} + 0 + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+x} \, dx \\ & = & -\dfrac{1}{2} + \left[\, \ln\left(|1+x|\right) \,\right]_0^1 \\ & = & -\dfrac{1}{2} + \ln(2) - \cancel{\ln(1)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } I_1 = \ln(2) - \frac{1}{2}.}$$

□

3. ***a)*** Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2\, I_{n+1} + I_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} I_{n+2} + 2\, I_{n+1} + I_n & = & \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{(1+x)^2} \, dx + 2 \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \, dx + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^n}{(1+x)^2} \, dx \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{(1+x)^2} + \dfrac{2\, x^{n+1}}{(1+x)^2} + \dfrac{x^n}{(1+x)^2} \, dx \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^n \; \left(x^2 + 2\,x + 1\right)}{(1+x)^2} \, dx \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^n \; \cancel{(1+x)^2}}{\cancel{(1+x)^2}} \, dx \\ & = & \displaystyle\int_0^1 x^n \, dx \\ & = & \left[\, \dfrac{1}{n+1} \; x^{n+1} \,\right]_0^1 \; = \; \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} + 2\, I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}}$$

□

b) En déduire I_2.

Démonstration.
D'après la question précédente : $I_2 + 2\, I_1 + I_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} I_2 & = & 1 - 2\, I_1 - I_0 \\ & = & 1 - 2 \left(\ln(2) - \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} \qquad \textit{(d'après 2.)} \\ & = & \dfrac{3}{2} - 2\, \ln(2) \end{array}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{3}{2} - 2\, \ln(2)}$$

□

c) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1 n = input('donnez une valeur pour n : ')
2 a = 1/2
3 b = log(2) - 1/2
4 for k = 2:n
5     aux = a
6     a = ------
7     b = ------
8 end
9 disp(b)
```

Démonstration.
Détaillons les différents éléments présents dans ce script.

- **Début du programme**
  - × En ligne 1, on stocke dans la variable `n`, une valeur pour n à l'aide d'une interface de dialogue avec l'utilisateur :

```
1 n = input('donnez une valeur pour n : ')
```

  - × En ligne 2 et 3, on définit les variables `a` et `b`.
  Initialement, ces deux variables sont affectées aux valeurs de I_0 et I_1.

```
2 a = 1/2
3 b = log(2) - 1/2
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 4 à 7 consistent à mettre à jour les variables `a` et `b` de sorte à ce qu'elles contiennent les valeurs successives de la suite (I_n).
  Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for).

```
4 for k = 2:n
5     aux = a
6     a = b
7     b = 1/((k-2) + 1) - 2 ⋆ a + aux
8 end
```

  Pour ce faire, on a introduit une variable auxiliaire `aux`. Détaillons le principe de cette boucle :
  - × avant le 1^er tour de boucle :

$$\texttt{a contient } I_0 \quad \text{et} \quad \texttt{b contient } I_1$$

  lors du 1^er tour de boucle (`k` contient 2) :

`aux = a`	(`aux` contient alors I_0, dernière valeur en date de `a`)
`a = b`	(`a` contient alors I_1, dernière valeur en date de `b`)
`b = 1/((k-2) + 1) - 2 ⋆ a + aux`	(`b` contient alors $\dfrac{1}{0+1} - 2\ I_1 - I_0 = I_2$, valeur obtenue avec la relation de ***3.a)*** et les valeurs actuelles de `a` et `aux`)

× avant le $2^{\text{ème}}$ tour de boucle, d'après ce qui précède :

$$\texttt{a} \text{ contient } I_1 \quad \text{et} \quad \texttt{b} \text{ contient } I_2$$

lors du $2^{\text{ème}}$ tour de boucle (`k` contient 3) :

`aux = a` $\left(\begin{array}{l}\texttt{aux} \text{ contient alors } I_1, \\ \text{dernière valeur en date de } \texttt{a}\end{array}\right)$

`a = b` $\left(\begin{array}{l}\texttt{a} \text{ contient alors } I_2, \\ \text{dernière valeur en date de } \texttt{b}\end{array}\right)$

`b = 1/((k-2) + 1) - 2 * a + aux` $\left(\begin{array}{l}\texttt{b} \text{ contient alors } \dfrac{1}{1+1} - 2\ I_2 - I_1 = I_3, \\ \text{valeur obtenue avec la relation de } \textbf{\textit{3.a)}} \text{ et les} \\ \text{valeurs actuelles de } \texttt{a} \text{ et } \texttt{aux}\end{array}\right)$

× ...

× avant le $(n-1)^{\text{ème}}$ tour de boucle :

$$\texttt{a} \text{ contient } I_{n-2} \quad \text{et} \quad \texttt{b} \text{ contient } I_{n-1}$$

lors du $(n-1)^{\text{ème}}$ tour de boucle (`k` contient n) :

`aux = a` $\left(\begin{array}{l}\texttt{aux} \text{ contient alors } I_{n-2}, \\ \text{dernière valeur en date de } \texttt{a}\end{array}\right)$

`a = b` $\left(\begin{array}{l}\texttt{a} \text{ contient alors } I_{n-1}, \\ \text{dernière valeur en date de } \texttt{b}\end{array}\right)$

`b = 1/((k-2) + 1) - 2 * a + aux` $\left(\begin{array}{l}\texttt{b} \text{ contient alors } \dfrac{1}{n+1} - 2\ I_{n-1} - I_{n-2} = I_n, \\ \text{valeur obtenue avec la relation de } \textbf{\textit{3.a)}} \text{ et les} \\ \text{valeurs actuelles de } \texttt{a} \text{ et } \texttt{aux}\end{array}\right)$

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `b` contient la quantité I_n. Il n'y a plus qu'à renvoyer la valeur contenue dans `b`.

```
9  disp(b)
```

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, écrire correctement la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension et permet certainement d'obtenir tous les points alloués.
- On a démontré dans cette question que si, avant le $k^{\text{ème}}$ tour de boucle :

$$\texttt{aux} \text{ contient } I_{k-2}, \quad \texttt{a} \text{ contient } I_{k-1} \quad \text{et} \quad \texttt{b} \text{ contient } I_k$$

alors, à l'issue de ce tour de boucle :

$$\texttt{aux} \text{ contient } I_{k-1}, \quad \texttt{a} \text{ contient } I_k \quad \text{et} \quad \texttt{b} \text{ contient } I_{k+1}$$

Cette propriété est ce qu'on appelle un **invariant de boucle**. Elle permet d'assurer la correction de la fonction implémentée et notamment le fait qu'à l'issue du dernier tour de boucle la variable `b` contient I_n.

Commentaire

- Il est à noter que si on teste la fonction avec une valeur de `n` strictement inférieure à 2, alors on n'entre pas dans la boucle (l'instruction `2:n` crée une matrice ligne vide). Dans ce cas, la variable `b` n'est pas mise à jour et contient à la fin du programme I_1, soit la valeur initialement affectée à `b`. Ainsi, la fonction renvoie la bonne valeur aussi lorsque la variable `n` prend la valeur 1 (mais pas quand `n` prend la valeur 0).
- Pour le calcul informatique du $n^{\text{ème}}$ terme d'une suite (z_n) récurrente d'ordre 1 (dont chaque terme dépend uniquement du précédent), il suffit d'introduire une variable `u` et de mettre à jour son contenu à l'aide d'une boucle. La suite (I_n) de l'énoncé est récurrente d'ordre 2 (chaque terme dépend des deux précédents). Obtenir son $n^{\text{ème}}$ terme nécessite non pas deux mais bien trois variables distinctes (la mise à jour de `a` écrase la valeur précédente de `a` qui est pourtant nécessaire pour définir la nouvelle valeur de `b`. On fait donc appel à une variable auxiliaire `aux` qui permet de stocker en mémoire de l'information.

□

4. ***a)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{array}{lccccl}
 & 0 & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\
\text{donc} & 1 & \leqslant & 1+x & \leqslant & 2 \\
\text{d'où} & 1 & \leqslant & (1+x)^2 & \leqslant & 4 \quad \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\
\text{ainsi} & 1 & \geqslant & \dfrac{1}{(1+x)^2} & \geqslant & \dfrac{1}{4} \quad \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{alors} & x^n & \geqslant & \dfrac{x^n}{(1+x)^2} & \geqslant & \dfrac{x^n}{4} \quad \textit{(car } x^n \geqslant 0\textit{)} \\
\text{enfin} & x^n & \geqslant & \dfrac{x^n}{(1+x)^2} & \geqslant & 0 \quad \textit{(car } \dfrac{x^n}{4} \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$:

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx & \geqslant & I_n & \geqslant & \displaystyle\int_0^1 0\,dx \\
\shortparallel & & & & \shortparallel \\
\dfrac{1}{n+1} & & & & 0
\end{array}$$

*(d'après le calcul de **3.a)**)*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}}$$

Commentaire

- Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.
  Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$:
  1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à- dire montrer :
  $$\forall t \in [a,b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$$
  où m et M sont deux réels à déterminer grâce à l'étude de la fonction f,
  2) on utilise ensuite la croissance de l'intégration (si les bornes a et b sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :
  $$m(b-a) = \int_a^b m\ dt \ \leqslant\ \int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant\ \int_a^b M\ dt = M(b-a)$$
- L'idée à retenir est que pour encadrer une intégrale, on commence systématiquement par encadrer l'intégrande.

□

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

Démonstration.
D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \ \leqslant\ I_n \ \leqslant\ \frac{1}{n+1}$$
Or :
× d'une part : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$
× d'autre part : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

□

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = n\, J_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On procède par intégration par parties (IPP).
$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x^n & & u'(x) & = & n\, x^{n-1} \\ v'(x) & = & \dfrac{1}{(1+x)^2} & & v(x) & = & -\dfrac{1}{1+x} \end{array} \right.$$
Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

On obtient :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx \\
&= \Big[x^n \times \Big(-\frac{1}{1+x}\Big) \Big]_0^1 - \int_0^1 n\,x^{n-1} \times \Big(-\frac{1}{1+x}\Big)\,dx \\
&= -\frac{1}{1+1} + 0 + n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx \\
&= -\frac{1}{2} + n\,J_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = n\,J_{n-1} - \frac{1}{2}}$$

□

6. a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$, en fonction de n.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$J_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \Big[\ln\big(|1+x|\big) \Big]_0^1 = \ln(2) - \cancel{\ln(1)}$$

$$\boxed{J_0 = \ln(2)}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
J_n + J_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^1 x^n\,\frac{\cancel{1+x}}{\cancel{1+x}}\,dx \\
&= \int_0^1 x^n\,dx
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Avec le même calcul qu'en } \textbf{\textit{3.a)}}\text{, on obtient : } \forall n \in \mathbb{N},\ J_n + J_{n+1} = \frac{1}{n+1}.}$$

□

b) En déduire la valeur de J_1.

Démonstration.
D'après la question précédente : $J_0 + J_1 = \dfrac{1}{0+1} = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } J_1 = 1 - J_0 = 1 - \ln(2).}$$

□

7. En utilisant les questions ***5.*** et ***6.***, compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1 n = input('donnez une valeur pour n : ')
2 J = log(2)
3 for k = 1:(n-1)
4     J = ------
5 end
6 I = ------
7 disp(I)
```

Démonstration.
Détaillons les éléments de ce script.

- **Début du programme**
  - En ligne 1, on stocke dans la variable `n`, une valeur de n à l'aide d'une interface de dialogue avec l'utilisateur.

```
1 n = input('donnez une valeur pour n : ')
```

  - En ligne 2, on définit la variable `J`.
    Cette variable est initialisée à J_0.

```
2 J = log(2)
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 5 consistent à mettre à jour la variable `J` de sorte à ce qu'elle contienne les valeurs successives de la suite (J_n).
  Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for).

```
3 for k = 1:(n-1)
4     J = 1/k - J
5 end
```

  On a ici utilisé la relation obtenue en question ***6.a)*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - J_n$. Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n \ = \ \frac{1}{n} - J_{n-1}$$

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `J` contient la valeur J_{n-1} (puisque la variable `k` varie de 1 à `n` -1). On obtient alors la valeur de I_n en utilisant la relation démontrée en question ***5***.

```
6 I = n ⋆ J - 1/2
```

  On finit en renvoyant la valeur de `I`.

```
7 disp(I)
```

□

8. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)\ :\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

- **Initialisation**
  - × d'une part, d'après ***6.b)*** : $J_1 = 1 - \ln(2)$.
  - × d'autre part :

$$(-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \ = \ -\big(\ln(2) - \frac{(-1)^{1-1}}{1} \big) \ = \ -\big(\ln(2) - 1 \big) \ = \ 1 - \ln(2)$$

  D'où $\mathcal{P}(1)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $J_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$)
  - × D'une part, d'après la question ***6.a)*** :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \frac{1}{n+1} - J_n \\ &= \frac{1}{n+1} - (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \end{aligned}$$

  - × D'autre part :

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \\ = \ & (-1)^{n+1}\ \ln(2) - (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ = \ & (-1)^{n+1}\ \ln(2) - (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{(n+1)-1}}{n+1} \right) \\ = \ & (-1)^{n+1}\ \ln(2) - (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{n+1} \\ = \ & (-1)^{n=1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) + (-1)^{1+(n+1)+n}\ \frac{1}{n+1} \\ = \ & (-1)^{n=1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) + (-1)^{2n+2}\ \frac{1}{n+1} \\ = \ & (-1)^{n=1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) + \frac{1}{n+1} && \textit{(car } 2n+2 \textit{ est pair)} \end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).}$$

□

9. a) Utiliser les questions ***4.*** et ***5.*** pour déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n \ = \ n\, J_{n-1} - \frac{1}{2}$$

On en déduit : $I_n + \dfrac{1}{2} = n\, J_{n-1}$. Et donc :

$$\frac{I_n}{n} + \frac{1}{2\,n} \ = \ J_{n-1}$$

- Or, d'après la question ***4.*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} J_{n-1} = 0.}$$

Commentaire

- On pouvait également déduire des questions ***4.*** et ***5.*** un équivalent de (J_n) pour conclure quant à sa limite.
  - × D'après la question ***5.***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n \ = \ n\, J_{n-1} - \frac{1}{2}$$

Or, d'après la question ***4.*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, J_{n-1} - \dfrac{1}{2} = 0$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, J_{n-1} = \dfrac{1}{2}$.

  - × Comme $\dfrac{1}{2} \neq 0$, on obtient : $n\, J_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$J_{n-1} \ \underset{n\to+\infty}{\sim} \ \frac{1}{2\,n}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$.
On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \lim\limits_{n\to+\infty} J_{n-1} = 0$.

- Ce n'était cependant sans doute pas la méthode attendue au regard de la question ***9.c)***. □

b) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$. Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \ = \ 0$$

- Par continuité de la fonction $x \mapsto |x|$ en 0, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} \left| (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \right| \ = \ 0$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \right| \ = \ |(-1)^n| \left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \ = \ \left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right|$$

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ est convergente et : } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).}$$

□

c) Utiliser la question ***5.*** pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\dfrac{1}{\alpha\, n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n \ = \ n\, J_{n-1} - \frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} \ = \ (n+1)\, J_n - \frac{1}{2}$$

Or, d'après la question ***4.*** : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_{n+1} = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)\, J_n - \dfrac{1}{2} = 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{n \to +\infty} (n+1)\, J_n = \frac{1}{2}.}$$

- Comme $\dfrac{1}{2} \neq 0$, on obtient : $(n+1)\, J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\,(n+1)}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\, n}.}$$

□

10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \ln(2) - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j}$.

a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ***8.*** :

$$J_n \ = \ (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \ = \ (-1)^n\, u_n$$

- Or, d'après la question précédente : $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,n}$. On en déduit : $(-1)^n\, u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,n}$. D'où :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(-1)^n\ 2\,n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n \times (-1)^n\ 2\,n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{2n}\ 2\,n} = \frac{(-1)^n}{1\times 2\,n}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2\,n}.}$$

$\square$

b) Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque :

$$\frac{(-1)^n}{2\,n} = -\frac{1}{2}\ \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

On ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ est convergente d'après } \textbf{\textit{9.b)}}, \\ \text{on en déduit que la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2\,n} \text{ est convergente.}\end{array}}$$

- La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ n'est pas une série à termes de signe constant. On ne peut donc pas lui appliquer (à elle ou son opposée) un critère de convergence des séries à termes positifs. On cherche alors à savoir si $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est absolument convergente.

  × Tout d'abord, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2\,n}$, alors :

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\frac{(-1)^n}{2\,n}\right| = \frac{1}{2\,n}$$

  × Ensuite : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2\,n} \geqslant 0$

  × La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$). Elle est donc divergente et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2\,n}$ aussi.
  (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul)

  Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} |u_n|$ n'est pas convergente.

  Autrement dit, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ n'est pas absolument convergente.

  On en conclut que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente ou divergente.

Commentaire

La tournure de la 2[nde] partie de la question est suffisamment vague pour que l'on doncsidère plusieurs réponses comme acceptables. Il convient cependant d'être précis.

- Dire qu'on ne peut rien conclure car $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ n'est pas une série à termes positif est `FAUX` !
  D'ailleurs, on parvient à conclure quant à la convergence de cette série dans la question ***11***.
- dire qu'on ne peut pas utiliser directement les critères de convergence des séries à termes positifs est par contre acceptable et permet certainement de récupérer une partie des points de la question.

□

11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)\, u_{k+1} - k\, u_k + (-1)^k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$u_k = (k+1)\, u_{k+1} - k\, u_k + (-1)^k \quad \Leftrightarrow \quad (k+1)\, u_k - (-1)^k = (k+1)\, u_{k+1}$$
$$\Leftrightarrow \quad u_k - \frac{(-1)^k}{k+1} = u_{k+1}$$

Cette dernière assertion est vérifiée. En effet, par définition de u_{k+1} :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \ln(2) - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \\ &= \ln(2) - \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} + \frac{(-1)^k}{k+1} \right) \\ &= \ln(2) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \frac{(-1)^k}{k+1} \ = \ u_k - \frac{(-1)^k}{k+1} \end{aligned}$$

Ainsi, par équivalence, la première assertion est également vérifiée.

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = (k+1)\, u_{k+1} - k\, u_k + (-1)^k.}$$

□

b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \ = \ (n+1)\, u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\,(1 - (-1)^n)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les égalités de la question précédente pour k variant de 1 à n.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} u_k}_{= S_n} \ = \ \sum_{k=1}^{n} (k+1)\, u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} k\, u_k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$$

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n} (k+1)\, u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} k\, u_k \\
= \ & \sum_{k=2}^{n+1} k\, u_k - \sum_{k=1}^{n} k\, u_k && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \cancel{\sum_{k=2}^{n} k\, u_k} + (n+1)\, u_{n+1} - \Big(1 \times u_1 + \cancel{\sum_{k=2}^{n} k\, u_k} \Big) && \textit{(par télescopage)} \\
= \ & (n+1)\, u_{n+1} - u_1
\end{aligned}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (-1)^k &= \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} && \textit{(car } -1 \neq 1\textit{)} \\
&= \frac{1}{2} \left((-1)^n - 1 \right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$S_n = (n+1)\, u_{n+1} - u_1 + \frac{1}{2} \left((-1)^n - 1 \right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = (n+1)\, u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2} \left(1 - (-1)^n \right).}$$

□

c) Démontrer alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$. Conclure.

Démonstration.

- Étudions la suite (S_{2n}).
  - × Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= (2n+1)\, u_{2n+1} - u_1 - \frac{1}{2} \left(1 - (-1)^{2n} \right) \\
&= (2n+1)\, u_{2n+1} - u_1 - \frac{1}{2} (1-1) \\
&= (2n+1)\, u_{2n+1} - u_1
\end{aligned}$$

  - × De plus :

$$u_1 = \ln(2) - \sum_{j=1}^{1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \ln(2) - 1$$

  - × Par ailleurs, d'après la question ***10.a)*** : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2n}$. D'où :

$$(2n+1)\, u_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \cancel{(2n+1)}\, \frac{(-1)^{2n+1}}{2\, \cancel{(2n+1)}} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n \to +\infty} S_{2n} = -\frac{1}{2} - \big(\ln(2) - 1 \big) = \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

- Étudions ensuite la suite (S_{2n+1}).
  - $\times$ Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= (2n+2)\, u_{2n+2} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{2n+1}\right) \\ &= (2n+2)\, u_{2n+2} - u_1 - \frac{1}{2}(1+1) \\ &= (2n+2)\, u_{2n+2} - \ln(2) + 1 - 1 \\ &= (2n+2)\, u_{2n+2} - \ln(2) \end{aligned}$$

  - $\times$ Par ailleurs, d'après la question ***10.a)*** : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2n}$. D'où :

$$(2n+2)\, u_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{(2n+2)}\, \frac{(-1)^{2n+2}}{2\, \cancel{(2n+2)}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

- Soit I un intervalle ouvert contenant $\ell = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$.
  - $\times$ Comme $S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_{2n}) (*i.e.* tous les termes d'indices pairs de la suite (S_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.
  - $\times$ Comme $S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_{2n+1}) (*i.e.* tous les termes d'indices impairs de la suite (S_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.

  On en déduit que l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_n) sauf un nombre fini d'entre eux.
  Ceci signifie que la suite (S_n) est convergente de limite $\ell = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ est donc convergente de somme } \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

Commentaire

- On démontre dans cette question la propriété, parfois appelée « propriété de recouvrement » :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \ S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

  Cette propriété n'apparaît pas dans le programme officiel de la voie ECE.
  Il faut donc la redémontrer à chaque utilisation.

- La convergence d'une suite (S_n) vers un réel ℓ admet deux définitions équivalentes.

  1) Définition sans les ε :

  (S_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (S_n) sauf un nombre fini d'entre eux

  C'est la définition donnée par le programme officiel (et celle qu'on a utilisée pour la démonstration).

  2) Définition avec les ε :

  (S_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |S_n - \ell| < \varepsilon$

- On peut aussi effectuer la démonstration précédente à l'aide de cette deuxième définition. Détaillons ce point.
  Soit $\varepsilon > 0$.

  × $S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc, par définition de la convergence :

  il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$: $|S_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$.

  × $S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc, par définition de la convergence :

  il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_2$: $|S_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$.

  On choisit alors $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$.

  $$\boxed{\text{Alors, pour tout } n \geqslant n_0 : |S_n - \ell| \leqslant \varepsilon.}$$

□

12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$ ***b)*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$ ***c)*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

$$\|$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\ln(2) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right)$$

- De plus, d'après la question ***9.b)*** : $\sum_{j=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} = \ln(2)$. D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\ln(2) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right) = \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

$\square$