DS5 (version A) /148

Exercice 1 /38

On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.
On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$, et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- **1 pt :** $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
- **1 pt :** $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
- **2 pts :** $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ **est stable par combinaison linéaire**

On considère une matrice A fixée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) \;=\; ({}^tA)\, M + M\, A$$

2. a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

- **1 pt : linéarité** ${}^t\big(({}^tA)\, M + M\, A\big) = {}^t\big(({}^tA)\, M\big) + {}^t\big(M\, A\big)$
- **1 pt : calcul pour montrer que** ${}^t\big(M\, A\big) = {}^tA\ {}^tM$
- **1 pt : conclusion**

b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

- **1 pt :** f **est à valeurs dans** $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
- **2 pt :** f **est linéaire**

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

- **1 pt : écriture système linéaire**
- **1 pt : résolution système linéaire**
- **1 pt :** $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\,(J, K, L)$

b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

- **2 pts :** $\mathscr{B}$ **est libre**
- **1 pt :** $\mathscr{B}$ **est génératrice de** $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ **donc est une base de** $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$
- **1 pt :** $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 3$

4. ***a)*** Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

- **1 pt :** $f(J) = -J - L$
- **1 pt :** $f(K) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $f(L) = -L$

b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$.

- **1 pt :** $\text{Im}(f) = \text{Vect}\,(f(J), f(K), f(L))$
- **1 pt :** $\text{Im}(f) = \text{Vect}\,(-J - L, -L)$ **(éventuellement** $= \text{Vect}\,(J, L)$**)**
- **1 pt :** $(-J - L, -L)$ **est une famille libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires)**
- **1 pt :** (J, L) **est une base de** $\text{Im}(f)$

c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis en donner une base.

- **0 pt :** $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ **est un espace vectoriel de dimension finie et** f **est un endomorphisme de** $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ **donc on peut utiliser le théorème du rang**
- **1 pt :** $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$
- **1 pt :** $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = 3$ **et** $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ **donc** $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$
- **1 pt :** (K) **est libre car** K **non nul**
- **1 pt :** $K \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$
- **1 pt :** (K) **est une base de** $\text{Ker}(f)$ **par argument de dimension**

5. ***a)*** Écrire la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1, 0\}$.

- **1 pt :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(J)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(K)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(L)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- **0 pt :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) En déduire les valeurs propres de f.

- **1 pt : la matrice est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux** *(ou autre argument)*
- **1 pt :** $\text{Sp}(F) = \{-1, 0\}$
- **1 pt :** $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(F)$

c) On note id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + \text{id}$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

- **1 pt :** $\text{rg}(f + \text{id}) = \text{rg}(A + I)$
- **1 pt :** $\text{rg}(A + I) = 2$
- **1 pt (bonus) :** $\dim(E_{-1}(f)) = \dim(\text{Ker}(f + id)) = 1$ **par théorème du rang**
- **1 pt (bonus) : ainsi** $\dim(E_{-1}(f)) + \dim(E_0(f)) = 2 < 3$ **donc** f **n'est pas diagonalisable.**

Exercice 2 /22

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$, et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

- **1 pt :** $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$

2. *a)* Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

- **2 pts :** $\forall i \in [\![2, n-1]\!]$**,** $\mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$ **(dont 1 pt pour explication)**

b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $\mathbb{P}\big([X=k]\big)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

- **1 pt : cas** $k=1$ **:** $\mathbb{P}([X=1]) = \dfrac{1}{n}$
- **3 pts : cas** $k \in [\![2, n]\!]$
  × **1 pt :** $[X=k] = B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k$
  × **1 pt : formule des probabilités composées**
  × **1 pt :** $\mathbb{P}([X=k]) = \frac{1}{n}$

c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

- **1 pt :** $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ **et** $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(n-1)(n+1)}{12}$

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente et qui vaut 0 sinon.

a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$\mathbb{P}\big([X=k] \cap [Y=0]\big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

- **3 pts :**
  × **1 pt :** $[X=k] \cap [Y=0] = B_1^{(0)} \cap \cdots \cap B_{k-1}^{(0)} \cap N_k$
  × **1 pt : formule des probabilités composées**
  × **1 pt :** $\mathbb{P}([X=k] \cap [Y=0]) = \dfrac{n-k}{n\,(n-1)}$

b) En déduire $\mathbb{P}\big([Y=0]\big)$.

- **1 pt :** $([X=k])_{k \in [\![1,n]\!]}$ **SCE**
- **1 pt : FPT**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y=0]) = \dfrac{1}{2}$

c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

- **1 pt :** $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{2}$ **et** $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{1}{4}$

4. Simulation informatique.
On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'uin', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme $[\![a, b]\!]$.

a) Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X.
On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB + 1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
1  n = input('Entrez une valeur pour n : ')
2  nB = n-1
3  X = 1
4  u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
5  while u < nB + 1
6      nB = --
7      u = grand(1, 1, 'uin', 1, --)
8      X = --
9  end
10 disp(X, 'La boule noire est apparue au tirage numéro')
```

- **3 pts : 1 pt par ligne**

```
6  nB = nB - 1
7  u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB + 1)
8  X = X + 1
```

b) Compléter les lignes 4 et 9 ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par X, la valeur prise par Y.

```
1  n = input('Entrez une valeur pour n : ')
2  nB = n-1
3  X = 1
4  Y = --
5  u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
6  while u < nB + 1
7      nB = --
8      if u == 1 then
9          Y = --
10     end
11     u = grand(1, 1, 'uin', 1, --)
12     X = --
13 end
14 disp(X, 'La boule noire est apparue au tirage numéro ')
15 disp(Y, 'La valeur de Y est ')
```

- **2 pts : 1 pt par ligne**

```
4  Y = 0
```

```
8  if u == 1 then
9      Y = 1
10 end
```

Exercice 3 /33

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I /12

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

- **1 pt : description de l'expérience**
- **1 pt : description de la v.a.r. et** $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \dfrac{1}{n}\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_i) = \dfrac{k}{n}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_i) = \dfrac{k}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

- **1 pt :** $[X_i = k] \cap [X_j = k] = \varnothing$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_i = k]) = \dfrac{1}{n^k}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_i = k] \cap [X_j = k]) = 0 \neq \mathbb{P}([X_i = k])\mathbb{P}([X_j = k])$

3. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

- **1 pt : description de l'expérience**
- **1 pt : description de la v.a.r. et** $X_i + X_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \dfrac{2}{n}\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_i + X_j) = \dfrac{2k}{n}\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$

b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_i + X_j) = \mathbb{V}(X_i) + 2\ \mathrm{Cov}(X_i, X_j) + \mathbb{V}(X_j)$
- **1 pt :** $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -\dfrac{k}{n^2}$

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II / 31

4. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.

- **1 pt :** $Z_1(\Omega) = \{1\}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_1) = 1$
- **1 pt :** $Z_2(\Omega) = \{1, 2\}$
- **2 pts :** $\mathbb{P}([Z_2 = 1]) = \frac{1}{n}$ **(1 pt pour décomposer l'événement, 1 pt pour réunion incompatible)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \frac{1}{n}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_2) = 2 - \dfrac{1}{n}$

5. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

a) Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$ et déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$.

- **1 pt :** $[Z_k = 1] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [X_i = k]$
- **1 pt : réunion incompatible**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \dfrac{1}{n^{k-1}}$
- **1 pt : cas** $k > n$ **:** $\mathbb{P}([Z_k = k]) = 0$
- **2 pts : cas** $k \leqslant n$ **(1 pt pour dénombrement de** $[Z_k = k]$ **et 1 pt pour** $\mathbb{P}([Z_k = k]) = \dfrac{n!}{(n-k)!} \dfrac{1}{n^k}$**.**

b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \dfrac{n - \ell + 1}{n} \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$.

- **1 pt :** $Z_k(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$
- **1 pt :** $\Big([Z_k = i] \Big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ **est un SCE**
- **1 pt : expression de la formule des probabilités totales**
- **1 pt :** $[Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell] = \varnothing$ **si** $i \neq \ell$ **et** $i \neq \ell - 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z_k = \ell - 1]}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{n - \ell + 1}{n}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z_k = \ell]}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}$
- **1 pt : cas** $\ell = 1$

c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n} \mathbb{E}(Z_k) + 1$.

- **1 pt : existence de** $\mathbb{E}(Z_k)$ **et** $\mathbb{E}(Z_{k+1})$
- **1 pt : expression correcte de l'espérance**
- **1 pt : changement d'indice**
- **1 pt : regrouper les deux sommes** $\sum\limits_{\ell=1}^{n}$
- **1 pt : reconnaître** $\mathbb{E}(Z_k)$
- **1 pt :** $\sum\limits_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) = 1$

6. ***a)*** Montrer que la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

- **2 pts dont 1 pt pour la raison**

b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n \left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n} \right)^k \right)$.

- **1 pt : formule** $v_k = \left(\dfrac{n-1}{n} \right)^{k-1} v_1$
- **1 pt :** $v_1 = -(n-1)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_k) = n \left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n} \right)^k \right)$

Problème /56

On convient que, pour tout réel x, on a : $x^0 = 1$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$$

- **2 pts : existence I_n**
  - × **1 pt : continuité de l'intégrande sur $[0,1]$**
  - × **1 pt : $[0,1]$ est un segment**
- **0 pt : existence J_n**

2. Calculer I_0 et I_1.

- **1 pt : $I_0 = \dfrac{1}{2}$**
- **2 pts : IPP**
  - × **1 pt : formule IPP**
  - × **1 pt : IPP valide car u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$**
- **1 pt : $I_1 = \ln(2) - \dfrac{1}{2}$**

3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2\, I_{n+1} + I_n$.

- **1 pt : linéarité de l'intégrale**
- **1 pt : $I_{n+2} + 2\, I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$**

b) En déduire I_2.

- **1 pt : $I_2 = \dfrac{3}{2} - \ln(2)$**

c) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1 n = input('donnez une valeur pour n : ')
2 a = 1/2
3 b = log(2) - 1/2
4 for k = 2:n
5     aux = a
6     a = ------
7     b = ------
8 end
9 disp(b)
```

- **1 pt : ligne 6**
- **2 pts : ligne 7**

```
6 a = b
7 b = 1/((k-2) + 1) - 2 * a + aux
```

4. *a)* Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

- **3 pts :**
  - × **1 pt : croissance de la fonction** $x \mapsto x^2$ **sur** $[0,+\infty[$
  - × **1 pt : décroissance de la fonction inverse sur** $]0,+\infty[$
  - × **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

- **1 pt : théorème d'encadrement**

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = n\,J_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

- **1 pt : IPP valide car** u **et** v **sont de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $[0,1]$
- **1 pt : reste du calcul**

6. *a)* Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$, en fonction de n.

- **1 pt :** $J_0 = \ln(2)$
- **1 pt :** $J_n + J_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$

b) En déduire la valeur de J_1.

- **1 pt :** $J_1 = 1 - \ln(2)$

7. En utilisant les questions *5.* et *6.*, compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input('donnez une valeur pour n : ')
J = log(2)
for k = 1:(n-1)
    J = ------
end
I = ------
disp(I)
```

- **2 pts : 1 pt par ligne**

```
for k = 1:(n-1)
    J = 1/k - J
end
I = n * J - 1/2
```

8. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**

9. *a)* Utiliser les questions *4.* et *5.* pour déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

- **1 pt : d'après** ***5.*** $J_{n-1} = \dfrac{I_n}{n} + \dfrac{1}{2\,n}$
- **1 pt : d'après** ***4.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

b) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

- **1 pt : par continuité de $|\cdot|$ en 0,** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = 0$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ **converge et** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$

c) Utiliser la question ***5.*** pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\dfrac{1}{\alpha\, n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

- **1 pt : d'après *5.* et *4.*,** $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\, J_n = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt : comme** $\dfrac{1}{2} \neq 0$, $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,n}$

10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \ln(2) - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j}$.

a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

- **1 pt : d'après *8.*,** $J_n = (-1)^n\, u_n$
- **1 pt :** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2\,n}$

b) Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

- **1 pt :** $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ **convergente d'après *9.b)*, donc** $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{2\,n}$ **aussi**
- **3 pts : critère d'équivalence des SATP pour démontrer que** $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ **est absolument convergente**
- **1 pt : on ne peut pas directement conclure quant à la nature de** $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$

11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)\, u_{k+1} - k\, u_k + (-1)^k$.

- **1 pt :** $u_k = (k+1)\, u_{k+1} - k\, u_k + (-1)^k \Leftrightarrow u_k - \dfrac{(-1)^k}{k+1} = u_{k+1}$
- **1 pt :** $u_{k+1} = u_k - \dfrac{(-1)^k}{k+1}$

b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \ = \ (n+1)\, u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\,(1 - (-1)^n)$$

- **1 pt : on somme l'égalité de la question précédente de 1 à n**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)\, u_{k+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} k\, u_k = (n+1)\, u_{n+1} - u_1$
- **2 pts :** $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k = \dfrac{1}{2}\, \big((-1)^n - 1\big)$

c) Démontrer alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$. Conclure.

- **3 pts :** $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$
  - × **1 pt :** $S_{2n} = (2n+1)\, u_{2n+1} - u_1$
  - × **1 pt :** $u_1 = \ln(2) - 1$
  - × **1 pt :** $(2n+1)\, u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}$ **d'après *10.a)***
- **2 pts :** $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$
- **3 pts : propriété de recouvrement**
  - × **1 pt : « Soit I un intervalle ouvert contenant $\ell = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$ »**
  - × **1 pt : I contient tous les termes d'indices pairs de (S_n)**
  - × **1 pt : I contient tous les termes d'indices impairs de (S_n)**

12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer :

a) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$ ***b)*** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$ ***c)*** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$

- **1 pt : d'après la question précédente** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\ln(2) - \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} \right) = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$
- **1 pt : d'après *9.b)*,** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} \right) = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$ **(réponse *c)*)**