DS5 (version A)

Exercice 1

On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.
On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$, et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) \ = \ ({}^tA)\, M + M\, A$$

2. ***a)*** Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

4. ***a)*** Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$.

c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

5. ***a)*** Écrire la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1, 0\}$.

b) En déduire les valeurs propres de f.

c) On note id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + \mathrm{id}$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

I. Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$, et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

2. ***a)*** Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $\mathbb{P}\big([X = k] \big)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente et qui vaut 0 sinon.

a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$\mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y = 0] \big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

b) En déduire $\mathbb{P}\big([Y = 0] \big)$.

c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

4. Simulation informatique.
On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'uin', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme $[\![a, b]\!]$.

a) Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X.
On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB + 1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
n = input('Entrez une valeur pour n : ')
nB = n-1
X = 1
u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
while u < nB + 1
    nB = --
    u = grand(1, 1, 'uin', 1, --)
    X = --
end
disp(X, 'La boule noire est apparue au tirage numéro')
```

b) Compléter les lignes 4 et 9 ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par X, la valeur prise par Y.

```
1  n = input('Entrez une valeur pour n : ')
2  nB = n-1
3  X = 1
4  Y = --
5  u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
6  while u < nB + 1
7      nB = --
8      if u == 1 then
9          Y = --
10     end
11     u = grand(1, 1, 'uin', 1, --)
12     X = --
13 end
14 disp(X, 'La boule noire est apparue au tirage numéro ')
15 disp(Y, 'La valeur de Y est ')
```

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II

4. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.

5. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

a) Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$ et déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$.

b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \dfrac{n - \ell + 1}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$.

c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\, \mathbb{E}(Z_k) + 1$.

6. ***a)*** Montrer que la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n \left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

Problème

On convient que, pour tout réel x, on a : $x^0 = 1$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

2. Calculer I_0 et I_1.

3. ***a)*** Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2\,I_{n+1} + I_n$.

b) En déduire I_2.

c) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input('donnez une valeur pour n : ')
a = 1/2
b = log(2) - 1/2
for k = 2:n
    aux = a
    a = ------
    b = ------
end
disp(b)
```

4. ***a)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = n\,J_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

6. ***a)*** Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$, en fonction de n.

b) En déduire la valeur de J_1.

7. En utilisant les questions ***5.*** et ***6.***, compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input('donnez une valeur pour n : ')
J = log(2)
for k = 1:(n-1)
    J = ------
end
I = ------
disp(I)
```

8. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

9. ***a)*** Utiliser les questions ***4.*** et ***5.*** pour déterminer la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

b) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

c) Utiliser la question ***5.*** pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\dfrac{1}{\alpha\, n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \ln(2) - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j}$.

a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

b) Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)\, u_{k+1} - k\, u_k + (-1)^k$.

b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \;=\; (n+1)\, u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\,(1 - (-1)^n)$$

c) Démontrer alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$. Conclure.

12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer :

a) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$ ***b)*** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$ ***c)*** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$