DS4 (version B) /169

Exercice 1 /40

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A,B,C) est une base de $\mathcal{E}$.

- **1 pt :** $\mathcal{E} = \operatorname{Vect}(A,B,C)$
- **1 pt : caractère générateur**
- **1 pt : caractère libre**

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M,N) \in \mathcal{E}^2, \ MN \in \mathcal{E}$$

- **1 pt : calcul de** MN
- **1 pt : conlusion (**$\in \operatorname{Vect}(A,B,C)$ **ou triangulaire supérieure)**

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

- **1 pt :** $M^{-1} = \dfrac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $M^{-1} \in \mathcal{E}$

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

- **1 pt : caractère morphisme**
- **2 pts : caractère endo (1 pt pour** $TM \in \mathcal{E}$**, 1 pt pour** $(TM)T \in \mathcal{E}$**)**

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

- **1 pt :** $\det(T) \neq 0$
- **1 pt :** $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\operatorname{Ker}(f) = \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$
- **1 pt :** f **injectif donc bijectif car endomorphisme de** $\mathcal{E}$ **dimension finie.**

6. On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.
Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.

- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{A,B,C}(f(A)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{A,B,C}(f(B)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{A,B,C}(f(C)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

- **1 pt : obtention du système linéaire** $\{a + c = 0$
- **2 pts :** $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,(-A + C, B)$
  0 si confusion d'objets
- **1 pt : caractère générateur**
- **1 pt : caractère libre**
- **1 pt : dimension**

8. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda\, M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- **1 pt : obtention du système**
- **1 pt : résolution du système avec argument** $\lambda \neq 1$
- **1 pt : l'unique solution de l'équation est** $0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$

9. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

- **1 pt :** $H^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** I **et** aH **commutent**
- **1 pt : formule du binôme correcte**
- **1 pt : découpage valable car** $n \geqslant 1$
- **1 pt :** $\forall k \geqslant 2,\ H^k = 0$ **(par récurrence immédiate)**
- **1 pt :** $\forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I$
- **1 pt :** $(I + aH)^n = I + anH$
- **1 pt : cas** $n = 0$

10. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

- **1 pt : utilisation de la question *9.*** $F^n = I + nH$

11. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

- **2 pts : trouver $G = I + \frac{1}{3}H$**
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g^3) = G^3$
- **1 pt : $g^3 = f$ (par l'isomorphisme de représentation)**

Exercice 2 /50

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \mapsto e^x - e\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < e < 2,8 \qquad 7,3 < e^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f /22

1. a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

- **1 pt : f deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$**
- **1 pt : $\forall x \in]0, +\infty[, \ f'(x) = e^x - \dfrac{e}{x}$**
- **1 pt : $\forall x \in]0, +\infty[, \ f''(x) = e^x + \dfrac{e}{x^2}$**

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

- **1 pt : signe de $f''(x)$ et sens de variations de f'**
- **1 pt : limite de f' en $+\infty$ et en 0**
- **1 pt : calcul de $f'(1)$**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	||	$+$		$+$	
Variations de f'	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

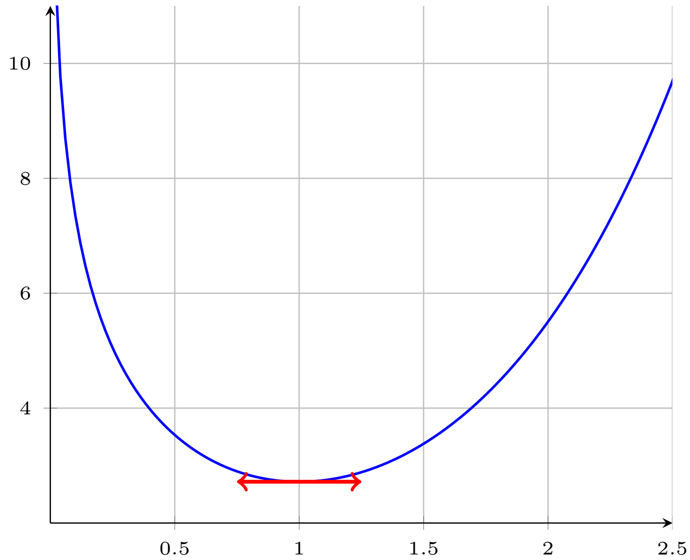
2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

- **1 pt : signe de $f'(x)$ et sens de variations de f**
- **1 pt : limite de f en $+\infty$**
- **1 pt : limite de f en 0 et : calcul de $f(1)$**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	|| $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

- **4 pts : tangente, limites, cohérence avec le TV, propreté**



4. a) Étudier les variations de la fonction $u : \left\{ \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array} \right.$

- **1 pt :** u **dérivable sur** $]0,+\infty[$
- **1 pt :** $\forall x \in]0,+\infty[$**,** $u'(x) = \dfrac{x^2 (\mathrm{e}^x - 1) + \mathrm{e}}{x^2}$
- **1 pt : signe de** $u'(x)$ **et sens de variations de** u

x	0	$+\infty$
Signe de $u'(x)$	||	$+$
Variations de u	||	$-\infty \nearrow +\infty$

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

- **1 pt :** $f'(x) = x \Leftrightarrow u(x) = 0$
- **3 pts : théorème de la bijection**
  - $\times$ **1 pt : hypothèses**
  - $\times$ **1 pt :** $u(\ ]0,+\infty[\ ) =]-\infty,+\infty[$
  - $\times$ **1 pt :** $0 \in]-\infty,+\infty[$
- **1 pt :** $u(1) < u(\alpha) < u(2)$
- **1 pt : application de** $u^{-1} :]-\infty,+\infty[\to]0,+\infty[$ **strictement croissante sur** $]-\infty,+\infty[$

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série /28

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

6. *a)* Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \left\{\begin{array}{rcl} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)-x \end{array}\right.$

- **1 pt :** g **dérivable sur** $[2,+\infty[$ **et** $g' : x \mapsto f'(x) - 1$
- **1 pt : signe de** $g'(x)$ **et variations de** g

x	2 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$
Variations de g	$g(2) \nearrow +\infty$

- **1 pt :** $g(2) > 0$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$
- **1 pt : utilisation de :** $\forall x \in [2,+\infty[$, $f(x) > x$ **(qst précédente)**

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

- **1 pt : théorème de convergence monotone**
- **3 pts : raisonnement par l'absurde**
  - × **1 pt : structure du raisonnement**
  - × **1 pt :** $\ell \geqslant 2$ **et** $g(\ell) = 0$
  - × **1 pt : d'après *6.a)*,** $\forall x \geqslant 2$, $g(x) \neq 0$

8. Écrire un programme en **Scilab** qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : boucle while**
- **1 pt :** `disp(N)`

```
A = input('Entrez un réel A : ')
N = 0
u = 2
while u < A
    N = N + 1
    u = exp(u) - %e ⋆ log(u)
end
disp(N)
```

9. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in [2,+\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.

- **3 pts : minoration**
  - × **1 pt :** $\ln$ **concave sur** $]0,+\infty[$
  - × **1 pt : équation de tangente** $y = \ln(2) + \dfrac{1}{2}\ (x-2)$
  - × **1 pt :** $2\,(\ln(2)-1) < 0$
- **3 pts : majoration**
  - × **1 pt :** $h : x \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^x}{3} - x$ **dérivable sur** $[2,+\infty[$ **et** $h' : x \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^x - 3}{3}$
  - × **1 pt : signe de** $h'(x)$ **et variations de** h

x	2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $h'(x)$	$+$
Variations de h	$h(2) \nearrow +\infty$

  - × **1 pt :** $h(2) \geqslant 0$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ u_n$.

- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2,+\infty[$ **donc on applique la qst précédente**
- **1 pt : reste**

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

- **1 pt : par récurrence immédiate** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathbf{e}}{2}\right)^n$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{6-\mathbf{e}}\right)^n$
- **2 pts : critère de comparaison des SATP**
  - × **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{6-\mathbf{e}}\right)^n$
  - × **1 pt :** $\sum \left(\dfrac{2}{6-\mathbf{e}}\right)^n$ **série géométrique de raison** $\dfrac{2}{6-\mathbf{e}} \in\ ]-1,1[$

Problème /79

L'objectif du problème est d'étudier les rudiments de la théorie de la communication *- ou théorie de l'information - introduite en 1948 par Claude Shannon.*

Définitions et notations

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.
φ est la fonction définie sur $]0,1]$ par $x \mapsto \varphi(x) = -\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.
Pour un événement A de probabilité non nulle, on pose $i(A) = \varphi(\mathbb{P}(A))$. h est la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$h(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \,]0,1], \quad h(x) = -x\,\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

Pour une variable aléatoire X discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles, on pose sous réserve d'existence :

$$H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} h(\mathbb{P}([X = x]))$$

Si X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors $H(X)$ existe et, en notant $p_k = \mathbb{P}([X = x_k])$, on a :

$$H(X) \;=\; \sum_{k=1}^{n} h(\mathbb{P}([X = x_k])) \;=\; \sum_{k=1}^{n} h(p_k)$$

Remarque : En théorie de l'information, $i(A)$ est appelé incertitude de l'événement *A et $H(X)$ est l'*incertitude moyenne *- ou* entropie *- de X.*

Partie I : Incertitude des événements /23

1. On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement « la carte tirée est la dame de cœur ».
Que valent $\mathbb{P}(A)$ et $i(A)$?

- **1 pt : Ω est la liste des 32 cartes, donc** $\mathrm{Card}(\Omega) = 32$
- **1 pt : probabilité uniforme**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{32}$
- **1 pt :** $i(A) = 5$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce équilibrée.
A est l'événement « obtenir n fois PILE ».
Préciser $i(A)$.

- **1 pt : Ω est l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\{$Pile, Face$\}$, donc** $\mathrm{Card}(\Omega) = 2^n$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2^n}$
- **1 pt :** $i(A) = n$

3. Vérifier les points suivants :

(i) Pour un événement Ω' quasi-certain : $i(\Omega') = 0$.

- **1 pt : traduction « quasi-certain »**
- **1 pt :** $i(\Omega') = 0$

(ii) Si A et l'événement contraire $\overline{A}$ sont équiprobables, alors $i(A) = 1$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** $i(A) = 1$

(iii) Si A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$ et si $\mathbb{P}(A \cap B) \neq 0$, alors $i(A \cap B) = i(A) + i(B)$.

- **1 pt :** $i(A \cap B)$ **bien définie**
- **1 pt : utilisation indépendance de** A **et** B
- **1 pt :** $i(A \cap B) = i(A) + i(B)$

4. Préciser $i(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$ quand les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$.
En déduire une nouvelle démonstration de ***2***.

- **1 pt : par récurrence immédiate :** $i(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = i(A_1) + \cdots + i(A_n)$
- **1 pt :** $A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} P_k$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(P_1 \cap \cdots \cap P_n) \neq 0$ **et les** P_i **sont indépendants donc on applique le résultat précédemment**
- **1 pt : équiprobabilité de** P_1 **et** $\overline{P_1}$**, donc** $i(P_1) = 1$
- **1 pt :** $i(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = n$

5. Soit A et B deux événements tels que $A \subset B$ et $P(A) \neq 0$. Comparer $i(A)$ et $i(B)$.

- **1 pt :** $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
- **1 pt :** $i(A) \geqslant i(B)$

6. Que vaut $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x)$ et quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?

- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = +\infty$
- **1 pt : interprétation**

Partie II : Incertitude d'une variable aléatoire discrète /30

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si U_n suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, que vaut $H(U_n)$?

- **1 pt :** U_n **admet une entropie car c'est une v.a.r. finie**
- **2 pts :** $H(U_n) = \dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}$

8. Si on suppose $\mathbb{P}([Z = 1]) = \dfrac{1}{4}$, $\mathbb{P}([Z = 2]) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}([Z = 3]) = \dfrac{1}{2}$, que vaut $H(Z)$?
Comparer $H(Z)$ et $H(U_3)$.

- **1 pt : calcul de** $H(Z) = \dfrac{3}{2}$
- **1 pt :** $H(Z) \leqslant H(U_3)$

9. On se propose de simuler informatiquement une variable aléatoire.
On supposera que `grand(1,1,'uin',1,3)` fournit au hasard un nombre élément de $\{1,2,3\}$ et que `grand(1,1,'uin',1,2)` fournit au hasard un élément de $\{1,2\}$.

```
y = 0
ini = grand(1,1,'uin',1,3)
if ini == 3 then
    y = grand(1,1,'uin',1,2)
else
    y = 3
end
```

On appelle Y le contenu de `y` après exécution de ce programme.
Donner la loi de Y, calculer son espérance $\mathbb{E}(Y)$ et son incertitude $H(Y)$.

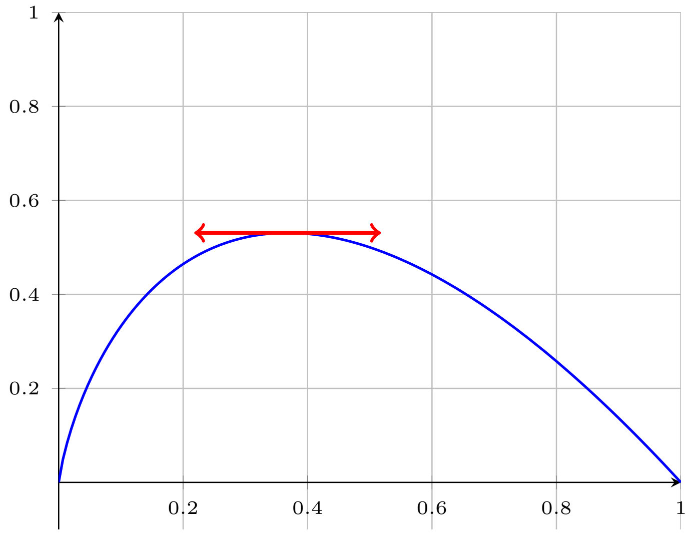
- **2 pts : explication programme**
- **2 pts :** $\mathbb{P}([Y=1]) = \dfrac{1}{6}$
  - × **1 pt :** $([U=3]\,,[U\neq 3])$ **SCE**
  - × **1 pt : FPT + calcul**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y=2]) = \dfrac{1}{6}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y=3]) = \dfrac{2}{3}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{5}{2}$
- **1 pt :** $H(Y) = \dfrac{1}{3}$

10. Vérifier que h est continue et positive sur $[0,1]$.
Est-elle dérivable en 0 ? Étudier h et dessiner sa courbe représentative.

- **1 pt :** h **continue sur** $[0,1]$
- **1 pt : positivité de** h **sur** $[0,1]$
- **1 pt : non dérivabilité de** h **en** 0
- **1 pt :** $h' : x \mapsto -\dfrac{\ln(x)+1}{\ln(2)}$
- **1 pt : signe de** $h'(x)$ **et variations de** h

x	0		e^{-1}		1
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de h	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\text{e}\ln(2)}$	$\searrow$	0

- **1 pt :** $h(1)=0$ **et** $h(\text{e}^{-1}) = \dfrac{1}{\text{e}\ \ln(2)}$
- **4 pts : courbe (1 pt pour la tangente horizontale, 1 pt pour la cohérence avec le TV, 1 pt pour la non dérivabilité de** h **en** 0**, 1 pt pour la propreté)**



11. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini.
Montrer que $H(X) \geqslant 0$ avec égalité si, et seulement si, X est quasi-certaine.

- **2 pts :** $H(X) \geqslant 0$
- **1 pt :** X **quasi-certaine** $\Rightarrow H(X) = 0$
- **4 pts :** $H(X) = 0 \Rightarrow X$ **quasi-certaine**
  - × **1 pt :** $\forall k,\ h(\mathbb{P}([X = x_k])) = 0$
  - × **1 pt :**$\forall k,\ \mathbb{P}([X = x_k]) \in \{0, 1\}$
  - × **1 pt :** $(\ [X = x_k]\ )_{k \in [\![1,n]\!]}$ **SCE**
  - × **1 pt : conclusion**

Partie III : Maximalité de l'entropie /26

12. *Étude pour* $n = 2$.
Pour $x \in [0, 1]$, on pose $h_2(x) = h(x) + h(1 - x)$.

a) Pour $x \in [0, 1]$, on a clairement $h_2(x) = h_2(1 - x)$.
Que signifie ce résultat quant à la courbe de h_2 dans un repère orthonormé ?

- **1 pt**

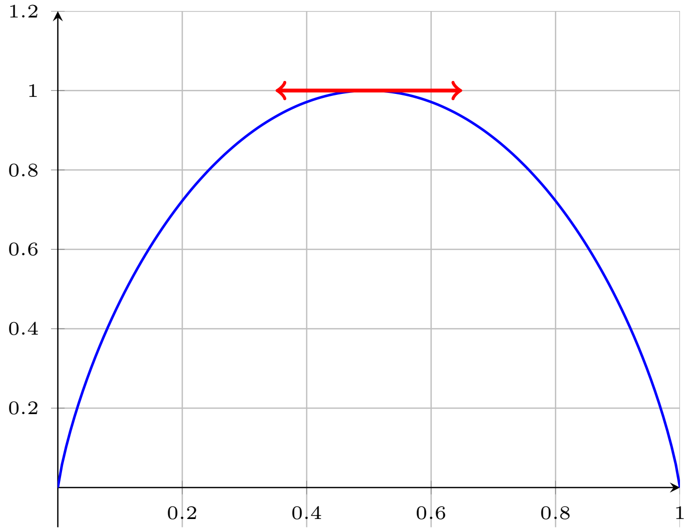
b) Étudier h_2 et donner son graphe.

- **1 pt : dérvabilité de** h_2 **sur** $]0, 1]$
- **1 pt :** $h_2' : x \mapsto \dfrac{\ln(1 - x) - \ln(x)}{\ln(2)}$
- **1 pt : signe de** $h_2'(x)$ **et variations de** h_2

x	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $h_2'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de h_2	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

- **1 pt :** $h_2(0) = 0$**,** $h_2(1) = 0$**,** $h_2(\frac{1}{2}) = 1$

- **3 pts : courbe (1 pt pour la tangente, 1 pt pour la cohérence avec TV, 1 pt pour la symétrie)**



c) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$.
Montrer que $H(X) \leqslant 1$ avec égalité si, et seulement si, $p = \dfrac{1}{2}$.

- **1 pt :** $H(X) \leqslant 1$
- **1 pt : cas d'égalité**

13. Soit $p \in \,]0,1[$ et G une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
On pose $m = \mathbb{E}(G)$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = \mathbb{P}([G = k])$.

a) Rappeler la valeur de m, montrer que $H(G)$ existe et la calculer.

- **1 pt :** $m = \dfrac{1}{p}$
- **1 pt :** $p_k = (1-p)^{k-1}\, p$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} h(p_k) = -\frac{1}{\ln(2)} \left(\ln(1-p) \sum_{k=1}^{n} k \; p_k + \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) \sum_{k=1}^{n} p_k \right)$
- **1 pt :** $([G = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ **SCE donc** $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$
- **1 pt :** G **admet une espérance donc** $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} k \; p_k$ **convergente et** $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k \; p_k = m$
- **1 pt :** $H(G) = -\dfrac{1}{\ln(2)} \left(\dfrac{\ln(p)}{p} + \ln\left(\dfrac{p}{1-p}\right) \right)$

b) Justifier par un argument de convexité :

$$\forall u > 0, \quad \ln(u) \leqslant u - 1$$

▶ *Dans la suite, on pourra utiliser sans démonstration que* $\ln(u) = u - 1$ *si, et seulement si,* $u = 1$.

- **1 pt :** $\ln$ **sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt : équation de tangente** $y = x - 1$

c) Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X) = m$ et $H(X)$ existe.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_k = \mathbb{P}([X = k])$ et on supposera $q_k > 0$.
En utilisant ***13.b)***, vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$q_k \ln(p) + (k-1)q_k \ln(1-p) - q_k \ln(q_k) \leqslant p_k - q_k$$

et établir : $H(X) \leqslant H(G)$ avec égalité si, et seulement si, X suit la même loi que G.

- **2 pts :** $q_k \ln(p) + (k-1)q_k \ln(1-p) - q_k \ln(q_k) \leqslant p_k - q_k$
  - × **1 pt :** $q_k \ \ln(p) + (k-1)\, q_k \ \ln(1-p) - q_k \ \ln(q_k) \ = \ q_k \ \ln\left(\dfrac{p_k}{q_k}\right)$
  - × **1 pt : on applique *13.b)* à** $\dfrac{p_k}{q_k} \in \,]0, +\infty[$
- **4 pts :** $H(G) \geqslant H(X)$
  - × **1 pt :** $p_k \ln(p_k) - q_k \ln(q_k) \ \leqslant \ p_k \ln(p_k) + p_k - q_k - q_k \ln(p) - (k-1)q_k \ln(1-p)$
  - × **1 pt :** $p_k \ \ln(p_k) - q_k \ \ln(q_k) \ \leqslant \ \left(1 + \ln\left(\dfrac{p}{1-p}\right)\right) (p_k - q_k) + \ln(1-p)\, k \ p_k - \ln(1-p)\, k \ q_k$
  - × **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$ **et** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} q_k = 1$
  - × **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \ p_k = \mathbb{E}(G) = \dfrac{1}{p}$ **et** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \ q_k = \mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$
- **2 pts : cas d'égalité**
  - × **1 pt :** $H(G) = H(X) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(\dfrac{p_k}{q_k}\right) \ = \ \dfrac{p_k}{q_k} - 1$
  - × **1 pt : d'après qst précédente :** $\ln\left(\dfrac{p_k}{q_k}\right) \ = \ \dfrac{p_k}{q_k} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{p_k}{q_k} \ = \ 1$