DS4 (version B)

Exercice 1

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est-à-dire :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, \ MN \in \mathcal{E}$$

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

6. On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.
Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.

7. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f - \text{id})$.

8. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda\, M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

10. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

11. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

Exercice 2

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. ***a)*** Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

4. ***a)*** Étudier les variations de la fonction $u : \left\{\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array}\right.$

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

6. ***a)*** Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \left\{\begin{array}{rcl} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}\right.$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

8. Écrire un programme en **Scilab** qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

9. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in [2,+\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\, u_n$.

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Problème

L'objectif du problème est d'étudier les rudiments de la théorie de la communication *- ou théorie de l'information - introduite en 1948 par Claude Shannon.*

Définitions et notations

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

φ est la fonction définie sur $]0,1]$ par $x \mapsto \varphi(x) = -\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

Pour un événement A de probabilité non nulle, on pose $i(A) = \varphi(\mathbb{P}(A))$. h est la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$h(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \,]0,1], \quad h(x) = -x\,\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

Pour une variable aléatoire X discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles, on pose sous réserve d'existence :

$$H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} h(\mathbb{P}([X = x]))$$

Si X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, alors $H(X)$ existe et, en notant $p_k = \mathbb{P}([X = x_k])$, on a :

$$H(X) \;=\; \sum_{k=1}^{n} h(\mathbb{P}([X = x_k])) \;=\; \sum_{k=1}^{n} h(p_k)$$

Remarque : En théorie de l'information, $i(A)$ est appelé incertitude de l'événement A *et $H(X)$ est l'*incertitude moyenne *- ou* entropie *- de X.*

Partie I : Incertitude des événements

1. On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement « la carte tirée est la dame de cœur ».
Que valent $\mathbb{P}(A)$ et $i(A)$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce équilibrée.
A est l'événement « obtenir n fois PILE ».
Préciser $i(A)$.

3. Vérifier les points suivants :

(i) Pour un événement Ω' quasi-certain : $i(\Omega') = 0$.

(ii) Si A et l'événement contraire $\overline{A}$ sont équiprobables, alors $i(A) = 1$.

(iii) Si A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$ et si $\mathbb{P}(A \cap B) \neq 0$, alors $i(A \cap B) = i(A) + i(B)$.

4. Préciser $i(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$ quand les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$.
En déduire une nouvelle démonstration de ***2***.

5. Soit A et B deux événements tels que $A \subset B$ et $P(A) \neq 0$. Comparer $i(A)$ et $i(B)$.

6. Que vaut $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x)$ et quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?

Partie II : Incertitude d'une variable aléatoire discrète

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si U_n suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, que vaut $H(U_n)$?

8. Si on suppose $\mathbb{P}([Z = 1]) = \dfrac{1}{4}$, $\mathbb{P}([Z = 2]) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}([Z = 3]) = \dfrac{1}{2}$, que vaut $H(Z)$?
Comparer $H(Z)$ et $H(U_3)$.

9. On se propose de simuler informatiquement une variable aléatoire.
On supposera que `grand(1,1,'uin',1,3)` fournit au hasard un nombre élément de $\{1, 2, 3\}$ et que `grand(1,1,'uin',1,2)` fournit au hasard un élément de $\{1, 2\}$.

```
y = 0
ini = grand(1,1,'uin',1,3)
if ini == 3 then
    y = grand(1,1,'uin',1,2)
else
    y = 3
end
```

On appelle Y la variable aléatoire simulée par ce programme.
Donner la loi de Y, calculer son espérance $\mathbb{E}(Y)$ et son incertitude $H(Y)$.

10. Vérifier que h est continue et positive sur $[0, 1]$.
Est-elle dérivable en 0 ? Étudier h et dessiner sa courbe représentative.

11. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini.
Montrer que $H(X) \geqslant 0$ avec égalité si, et seulement si, X est quasi-certaine.

Partie III : Maximalité de l'entropie

12. *Étude pour* $n = 2$.
Pour $x \in [0, 1]$, on pose $h_2 : x \mapsto h(x) + h(1 - x)$.

a) Pour $x \in [0, 1]$, on a clairement $h_2(x) = h_2(1 - x)$.
Que signifie ce résultat quant à la courbe de h_2 dans un repère orthonormé ?

b) Étudier h_2 et donner son graphe.

c) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
Montrer que $H(X) \leqslant 1$ avec égalité si, et seulement si, $p = \dfrac{1}{2}$.

13. Soit $p \in]0, 1[$ et G une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
On pose $m = \mathbb{E}(G)$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = \mathbb{P}([G = k])$.

a) Rappeler la valeur de m, montrer que $H(G)$ existe et la calculer.

b) Justifier par un argument de convexité :

$$\forall u > 0, \quad \ln(u) \leqslant u - 1$$

▶ *Dans la suite, on pourra utiliser sans démonstration que* $\ln(u) = u - 1$ *si, et seulement si,* $u = 1$.

c) Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X) = m$ et $H(X)$ existe.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_k = \mathbb{P}([X = k])$ et on supposera $q_k > 0$.
En utilisant ***13.b)***, vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$q_k \ln(p) + (k - 1) q_k \ln(1 - p) - q_k \ln(q_k) \leqslant p_k - q_k$$

et établir : $H(X) \leqslant H(G)$ avec égalité si, et seulement si, X suit la même loi que G.