DS4 (version A)

Exercice 1 (EML 2014)

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Par définition de $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \operatorname{Vect}(A, B, C) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{E} \text{ est un espace vectoriel et la famille } (A,B,C) \text{ engendre } \mathcal{E}.}$$

- Montrons que la famille (A, B, C) est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B + \lambda_3 \cdot C = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ $(*)$.

$$\text{Or :} \quad \begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La famille } (A,B,C) \text{ est donc libre.}}$$

- La famille (A, B, C) est :
  - × libre,
  - × génératrice de $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } (A,B,C) \text{ est une base de } \mathcal{E}.}$$

Commentaire

- Il est relativement fréquent de trouver dans les sujets de concours des ensembles de matrices écrites à l'aide de paramètres. Lorsque c'est le cas, on trouve généralement une ou plusieurs questions consistant à démontrer la stabilité de ces ensembles (comme c'est le cas ici en question ***2.*** et ***3.***). Il faut donc être à l'aise sur la compréhension et la manipulation de tels ensembles. Ici, l'ensemble $\mathcal{E}$ n'est autre que l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 triangulaires supérieures.
- Dans l'énoncé, on demande de démontrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel engendrée par la famille (A, B, C). Cette famille étant fournie, l'écriture $\mathcal{E} = \text{Vect}\,(A, B, C)$ (c'est le caractère générateur de la famille) permet de démontrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel. Il faut privilégier cette démonstration à celle qui consiste à vérifier les propriétés axiomatiques de la notion d'espace vectoriel. Cependant cette manière de procéder doit aussi être connue car l'ensemble étudié ne se décrit pas toujours naturellement comme espace vectoriel engendré par une partie.
- Rappelons ci-dessous la rédaction.

(i) $\mathcal{E} \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

(ii) $\mathcal{E} \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$.

(iii) Démontrons que $\mathcal{E}$ est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$.

× Comme $M \in \mathcal{E}$, il existe $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$.

× Comme $N \in \mathcal{E}$, il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$.

Démontrons que $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{E}$. On a :

$$\lambda \cdot M + \mu \cdot N \; = \; \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} \lambda\, a_1 + \mu\, a_2 & \lambda\, b_1 + \mu\, b_2 \\ 0 & \lambda\, c_1 + \mu\, c_2 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

avec : $(\alpha, \beta, \gamma) = (\lambda\, a_1 + \mu\, a_2, \lambda\, b_1 + \mu\, b_2, \lambda\, c_1 + \mu\, c_2) \in \mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$

□

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, MN \in \mathcal{E}$$

Démonstration.
Soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$. Il existe donc $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ et $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$MN = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\, a_2 & a_1\, b_2 + b_1\, c_2 \\ 0 & c_1\, c_2 \end{pmatrix} = a_1\, a_2 \cdot A + (a_1\, b_2 + b_1\, c_2) \cdot B + c_1\, c_2 \cdot C$$

Donc $MN \in \text{Vect}\,(A, B, C)$. D'où $MN \in \mathcal{E}$.

$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{E} \text{ est bien stable par multiplication.}}$

Commentaire

On pouvait aussi rédiger autrement :

$$MN = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\, a_2 & a_1\, b_2 + b_1\, c_2 \\ 0 & c_1\, c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) = (a_1\, a_2, a_1\, b_2 + b_1\, c_2, c_1\, c_2) \in \mathbb{R}^3$.

□

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$. Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

- Rappelons tout d'abord :

$$M \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det(M) \neq 0 \Leftrightarrow a \times c - 0 \times b \neq 0 \Leftrightarrow ac \neq 0$$

Commentaire

On se sert ici de la caractérisation de l'inversibilité des matrices carrées d'ordre 2. On pouvait aussi tout simplement remarquer que la matrice M est triangulaire (supérieure). Ainsi, elle est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

- Supposons M inversible, c'est-à-dire $ac \neq 0$. Dans ce cas :

$$M^{-1} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{c}{ac} \cdot A - \frac{b}{ac} \cdot B + \frac{a}{ac} \cdot C \in \mathcal{E}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } M \in \mathcal{E} \text{ est inversible, } M^{-1} \in \mathcal{E}.}$$

Commentaire

Attention, on ne montre pas dans cette question que toutes les matrices de $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire les matrices carrées d'ordre 2 triangulaires supérieures) sont inversibles !
On démontre simplement que, si une matrice triangulaire supérieure est inversible, alors son inverse est aussi triangulaire supérieure. C'est à nouveau une propriété de stabilité : $\mathcal{E}$ est stable par passage à l'inverse.

□

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M_1, M_2) \in \mathcal{E}^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) &= T\ (\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2)\ T \\ &= (\lambda_1 \cdot TM_1 + \lambda_2 \cdot TM_2)\ T && \textit{(par distributivité à gauche de } \times \textit{ sur } +) \\ &= \lambda_1 \cdot TM_1T + \lambda_2 \cdot TM_2T && \textit{(par distributivité à droite de } \times \textit{ sur } +) \\ &= \lambda_1 \cdot f(M_1) + \lambda_2 \cdot f(M_2) \end{aligned}$$

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathcal{E}$.
  Soit $M \in \mathcal{E}$.
  Remarquons tout d'abord : $T = A + B + C \in \text{Vect}(A, B, C)$. Ainsi $T \in \mathcal{E}$.
  On en déduit, par stabilité de $\mathcal{E}$ par multiplication (question ***3.***) : $TM \in \mathcal{E}$.
  Enfin : $f(M) = TMT = (TM)\,T \in \mathcal{E}$ en utilisant une nouvelle fois la question ***3.***

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc un endomorphisme de } \mathcal{E}.}$$

Commentaire

La rédaction choisie ici pour le deuxième point démontre une prise de recul par rapport aux questions précédentes. Cependant, il est aussi possible de résoudre cette question en effectuant un calcul. Plus précisément, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, alors :

$$f(M) \;=\; TMT \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a & b+c \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a & a+b+c \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

□

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\det(T) = 1 \times 1 - 0 \times 1 = 1 \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } T \text{ est inversible.}}$$

(l'inverse de T est : $T^{-1} \;=\; \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

- Déterminons $\text{Ker}(f)$.
  Soit $M \in \mathcal{E}$.

$$\begin{array}{rcl} M \in \text{Ker}(f) & \Leftrightarrow & f(M) \;=\; 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\[2mm] & \Leftrightarrow & TMT \;=\; 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\[2mm] & \Leftrightarrow & T^{-1}\,TMT \;=\; T^{-1} \times 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \quad \left(= 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right) \\[2mm] & \Leftrightarrow & MT\,T^{-1} \;=\; 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \times T^{-1} \quad \left(= 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right) \\[2mm] & \Leftrightarrow & M \;=\; 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \end{array}$$

  Donc $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$ et l'endomorphisme f est injective.

- Enfin, comme f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ de dimension **finie** :

$$f \text{ est injective} \;\Leftrightarrow\; f \text{ est bijective}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc un automorphisme de } \mathcal{E}.}$$

Commentaire

- On utilise ici un cas particulier de la proposition suivante :
  Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions **finies** tels que $\dim(E) = \dim(F)$.
  Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

$$f \text{ bijective} \;\Leftrightarrow\; f \text{ injective} \;\Leftrightarrow\; f \text{ surjective}$$

- Attention à ne pas confondre :
  × $T \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, matrice qui intervient dans la définition de f.
  × $F \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, matrice représentative de f dans la base (A, B, C) (*cf* question **7.**).

□

6. On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.
Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.

Démonstration.

- $f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C.$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}\big(f(A)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- $f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C.$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}\big(f(B)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- $f(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot A + 1 \cdot B + 1 \cdot C.$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}\big(f(C)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$\boxed{\text{Donc } F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

7. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

Démonstration.

- Soit $M \in \mathcal{E}$. Alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C$.

  Autrement dit : $U = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(M) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} M \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) & \Leftrightarrow & (f - \mathrm{id}_{\mathcal{E}})(M) = 0_{\mathcal{E}} \\ & \Leftrightarrow & (F - I_3)(U) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & 0 & = & 0 \\ a & + & c & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \ a = -c \right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) & = & \{M \in \mathcal{E} \mid (f - \mathrm{id}_{\mathcal{E}})(M) = 0_{\mathcal{E}}\} \\ & = & \{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C \mid a = -c\} \\ & = & \{-c \cdot A + b \cdot B + c \cdot C \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{c \cdot (-A + C) + b \cdot B \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(-A + C, B) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,(-A + C, B).}$$

- La famille $(-A+C, B)$ est :
  - × génératrice de $\text{Ker}(f - \text{id})$,
  - × libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en conclut que la famille } (-A+C, B) \text{ est une base de } \text{Ker}(f-\text{id}) \text{ et ainsi :}\\ \dim\big(\text{Ker}(f-\text{id})\big) = \text{Card}(-A+C,B) = 2.\end{array}}$$

Commentaire

- Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $E_1(f) = \text{Ker}(f - \text{id}_{\mathcal{E}})$, noyau d'un endomorphisme de $\mathcal{E}$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$. Si $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $U = \text{Mat}_{(A,B,C)}(M) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont bien deux représentations différentes de la même matrice M, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C}_{\in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \ \cancel{=} \ \underbrace{\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\text{Vect}\,(-A+C, B)}_{E_1(f)} \ \cancel{=} \ \underbrace{\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)}_{E_1(F)}$$

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(F)$ par lecture de la matrice $F - \lambda I$.

  Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 1$.

  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $E_1(F)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(F - I_3)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

  Or :

$$\begin{array}{rcl}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & = & x\cdot C_1 + y\cdot C_2 + z\cdot C_3\\ & = & x\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\end{array}$$

  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, il y a deux possibilités :

  - × si $x = 0$ alors forcément $z = 0$ car sinon on crée un coefficient non nul en $2^{\text{ème}}$ position de la combinaison linéaire. Enfin, si $x = z = 0$, alors toute valeur de y convient pour créer une combinaison linéaire nulle. On peut prendre par exemple $y = 1$. Ainsi :

$$E_1(F) \ \supset \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

  - × si $x \neq 0$ alors forcément $z = -x$. En prenant par exemple $x = 1$ on obtient :

$$E_1(F) \ \supset \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

  Finalement : $E_1(F) \ \supset \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

  Et l'égalité est vérifiée pour des raisons de dimension (il est simple de démontrer : $\text{rg}(F - I_3) = 1$ ce qui permet de conclure, par théorème du rang : $\dim\big(E_1(F)\big) = 2$.

8. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda\, M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$. Alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C$.

Autrement dit : $U = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(M) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{array}{rcl}
f(M) = \lambda \cdot M & \Longleftrightarrow & F\,U = \lambda \cdot U \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & (F - \lambda\, I_3)\, U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)\, a & & & & & = & 0 \\ a & + & (1-\lambda)\, b & + & c & = & 0 \\ & & & & (1-\lambda)\, c & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda} L_3}{\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda} L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & & & & & = & 0 \\ a & + & (1-\lambda)\, b & + & c & = & 0 \\ & & & & c & = & 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(car } \lambda \neq 1\textit{)} \\[2mm]
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} a & & & = & 0 \\ (1-\lambda)\, b & + & c & = & 0 \\ & & c & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \{ a = b = c = 0 \\
& & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}
$$

$$\boxed{\text{On en déduit que l'unique solution de l'équation } f(M) = \lambda \cdot M \text{ dans } \mathcal{E} \text{ est la matrice nulle } 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}.}$$

□

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $H^k = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.
  (ou alors on remarque : $\forall k \geqslant 2$, $H^k = H^2\ H^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\ H^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$)

- Soit $a \in \mathbb{R}$.
  Les matrices I et $a\,H$ commutent car I commute avec toutes les matrices carrée du même ordre.
- Soit $n \geqslant 1$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll}
(I+aH)^n & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k}\,(aH)^k \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\,H^k & \textit{(car : } \forall k \in [\![0,n]\!],\ I^{n-k} = I\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k\,H^k \ + \ \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^k\,H^k & \textit{(cette décomposition est valide car } n \geqslant 1\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k\,H^k & \textit{(car : } \forall k \geqslant 2,\ H^k = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\textit{)} \\
& = & \binom{n}{0} a^0\,H^0 + \binom{n}{1} a^1\,H^1 & \\
& = & I + a\,n\,H \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ na & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &
\end{array}$$

- De plus : $(I+aH)^0 = I$ et $I + a \times 0 \cdot H = I$.
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N},\ (I + a\,H)^n = I + a\,n\,H.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m,p,n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la somme la plus à droite est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc essentiel pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit donc être traité à part.
- Ici, la matrice H vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ H^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ et $n = 1$ (le découpage de la somme est alors valable pour $n \geqslant 2$). □

10. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On remarque que : $F = I + H = I + 1 \cdot H$.
D'après la question ***9.*** appliquée à $a = 1$, on obtient : $F^n = I + 1 \times n \cdot H$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ F^n = I + n\,H.}$$

□

11. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

Démonstration.

- D'après la question ***9.***, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $(I + a\,H)^3 = I + 3\,a\,H$.
  Or $F = I + 1 \cdot H$. Donc, en choisissant $a = \dfrac{1}{3}$, on obtient :

$$\left(I + \frac{1}{3}\,H\right)^3 = I + 3 \times \frac{1}{3} \cdot H = I + H = F$$

$$\boxed{\text{Donc en posant } G = I + \frac{1}{3}\,H\text{, on obtient : } G^3 = F.}$$

- On rappelle que $F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f)$.
  On considère alors l'endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$ tel que $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g) = G$.
  D'après la relation du point précédent, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g^3) = \big(\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g)\big)^3 = G^3 = F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f)$$

  L'application $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(.)$ étant un isomorphisme, on obtient, par injectivité : $g^3 = f$.

$$\boxed{\text{On a donc bien exhibé un endomorphisme } g \text{ de } \mathcal{E} \text{ tel que } g \circ g \circ g = f.}$$

Commentaire

Il faut retenir le schéma classique développé dans cette question :

(i) on démontre une propriété sous forme matricielle,

(ii) on en déduit une propriété sur les endomorphismes par la passerelle matrice / endomorphisme. □

Exercice 2 (EML 2017)

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

Démonstration.
Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont deux fois dérivables sur l'intervalle $]0,+\infty[$ en tant que fonctions usuelles.

La fonction f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{x} \quad \text{et} \quad f''(x) = \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}}{x^2}.}$$

□

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

Démonstration.

- Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}}{x^2} > 0$.
  La fonction f' est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = +\infty$.

  Donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$.
- De plus : $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = 0$.

  Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = +\infty$.
- $f'(1) = \mathrm{e}^1 - \dfrac{\mathrm{e}}{1} = \cancel{\mathrm{e}} - \cancel{\mathrm{e}} = 0$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	‖	$+$		$+$	
Variations de f'	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

□

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

Démonstration.

- La fonction f' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Ainsi :
  - $\times$ $\forall x \in]0,1[,\ f'(x) < f'(1) = 0$.
  - $\times$ $\forall x \in]1,+\infty[,\ f'(x) > f'(1) = 0$.

  Donc f est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
- Déterminons la limite de f en 0. Comme : $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty$.
- Déterminons alors la limite de f en $+\infty$. On écrit :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x) = \mathrm{e}^x \left(1 - \mathrm{e}\,\frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}\right)$$

  Par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$.
  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(1) = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}\ln(1) = \mathrm{e}$.

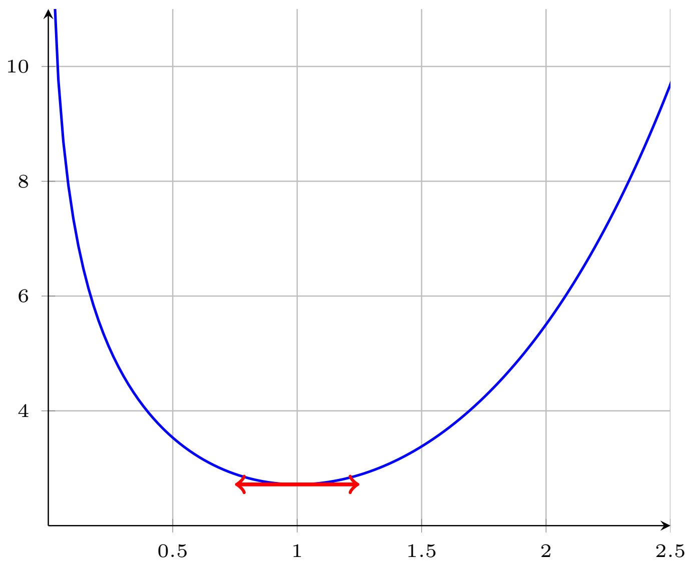
On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

□

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Démonstration.



Commentaire

On s'efforcera de faire les questions de tracé de courbe.
En effet, ce type de question consiste uniquement à faire apparaître sur un graphique toutes les informations qu'on a recueillies dans les questions précédentes. D'ailleurs, il ne faut oublier de faire apparaître les tangentes horizontales et les points d'inflexion si on les a déterminés auparavant.

□

4. a) Étudier les variations de la fonction $u : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array}$

Démonstration.

- La fonction u est dérivable sur $]0,+\infty[$ car elle est la somme $f_1 + f_2$ de :
  - × $f_1 = f'$ dérivable sur $]0,+\infty[$ car f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$,
  - × $f_2 : x \mapsto x$ dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } u \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[.}$$

- Soit $x \in]0,+\infty[$:

$$u'(x) \ = \ f''(x) - 1 \ = \ \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}}{x^2} - 1 \ = \ \frac{x^2\ \mathrm{e}^x + \mathrm{e} - x^2}{x^2} \ = \ \frac{x^2\ (\mathrm{e}^x - 1) + \mathrm{e}}{x^2}$$

Comme $x^2 > 0$, on en déduit que le signe de $u'(x)$ est celui de $x^2\ (\mathrm{e}^x - 1) + \mathrm{e}$.
Or :
× comme $x > 0$, alors : $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 = 1$. Ainsi : $\mathrm{e}^x - 1 > 0$.
× de plus : $x^2 > 0$ et $\mathrm{e} > 0$.
On en déduit : $u'(x) > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } u \text{ est donc strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

- D'après ***1.b)*** : $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$. De plus : $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.
  D'où : $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$.
- Déterminons alors la limite de f en $+\infty$. Soit $x \in]0,+\infty[$:

$$u(x) \ = \ \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{x} - x \ = \ \mathrm{e}^x \left(1 - \frac{\mathrm{e}}{x\mathrm{e}^x} - \frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
Signe de $u'(x)$	‖	$+$
Variations de u	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

□

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Démonstration.

- Tout d'abord, soit $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = x \ \Leftrightarrow\ f'(x) - x = 0 \ \Leftrightarrow\ u(x) = 0$$

  On cherche donc à montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.

- La fonction u est :
  - × continue sur $]0, +\infty[$ (car dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après la question ***4.a)***),
  - × strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

  Ainsi la fonction u réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $u(]0, +\infty[)$.

$$u(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \to 0} u(x), \lim_{x \to +\infty} u(x) \right[=]-\infty, +\infty[$$

  Or $0 \in]-\infty, +\infty[$, donc l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$.

  $\boxed{\text{On en déduit que l'équation } f'(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur }]0, +\infty[.}$

- Tout d'abord :
  - × $u(\alpha) = 0$
  - × $u(1) = f'(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$
  - × $u(2) = f'(2) - 2 = e^2 - \dfrac{e}{2} - 2 > 0$

    En effet, d'après les encadrements donnés par l'énoncé, on obtient :
    - – d'une part : $7,3 < e^2 < 7,4$. Donc : $5,3 < e^2 - 2 < 5,4$
    - – d'autre part : $2,7 < e < 2,8$. Donc : $1,35 < \dfrac{e}{2} < 1,4$. D'où : $-1,4 < -\dfrac{e}{2} < -1,35$

    Ainsi : $3,9 < e^2 - 2 - \dfrac{e}{2} < 4,05$. On en conclut : $u(2) > 3,9 > 0$.

  On en déduit :

$$u(1) \ < \ u(\alpha) \ < \ u(2)$$

  Or, d'après le théorème de la bijection, $u^{-1} :]-\infty, +\infty[\to]0, +\infty[$ est strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$. En appliquant u^{-1}, on obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} u^{-1}\big(u(1)\big) & < & u^{-1}\big(u(\alpha)\big) & < & u^{-1}\big(u(e)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 1 & & \alpha & & e \end{array}$$

$$\boxed{1 < \alpha < 2}$$

□

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

▸ **Initialisation** :
D'après l'énoncé : $u_0 = 2 \geqslant 2$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geqslant 2$).
Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

- La fonction f est définie sur $]0,+\infty[$.
  Or $u_n \geqslant 2$, donc $u_n \in\ ]0,+\infty[$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.
- D'après la question ***2.***, e est le minimum de f sur $]0,+\infty[$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ f(x) \geqslant \mathrm{e}$$

En appliquant cette inégalité à $x = u_n \in\ ]0,+\infty[$, on obtient :

$$u_{n+1} \geqslant \mathrm{e} > 2$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 2.}$$

□

6. a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$

Démonstration.

- La fonction g est dérivable sur $[2,+\infty[$ car elle est la somme $g_1 + g_2$ de :
  × $g_1 = f$ dérivable (car deux fois dérivable d'après ***1.a)***) sur $]0,+\infty[$,x donc sur $[2,+\infty[$,
  × $g_2 : x \mapsto x$ dérivable sur $[2,,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est dérivable sur } [2,+\infty[.}$$

- Soit $x \in [2,+\infty[$, $g'(x) = f'(x) - 1$.
  D'après la question ***1.b)***, la fonction f' est croissante sur $[2,+\infty[\ \subset\ ]0,+\infty[$. Ainsi :

$$f'(x) \ \geqslant\ f'(2)$$

Or, avec les encadrements donnés par l'énoncé : $f'(2) = \mathrm{e}^2 - \dfrac{\mathrm{e}}{2} \geqslant 7,3 - 1,4 = 5,9 > 1$.
On en déduit : $f'(x) > 1$. D'où : $g'(x) > 0$.
On obtient le tableau de variations suivant :

x	2 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$
Variations de g	$g(2)$ ↗ $+\infty$

- Déterminons maintenant le signe de g. Comme g est croissante sur $[2, +\infty[$, on a :
$$\forall x \geqslant 2, \quad g(x) \geqslant g(2)$$
Il suffit alors de démontrer : $g(2) > 0$ pour pouvoir conclure. Calculons :
$$g(2) \ = \ f(2) - 2 \ = \ \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\ln(2) - 2$$
D'après les encadrements de l'énoncé :
  × d'une part : $7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4$
  × d'autre part : $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$ et $0,6 < \ln(2) < 0,7$. D'où :
$$\underset{1,62}{\underset{\parallel}{2,7 \times 0,6}} \quad < \quad \mathrm{e}\ln(2) \quad < \quad \underset{1,96}{\underset{\parallel}{2,8 \times 0,7}}$$
  Ainsi : $-1,96 < -\mathrm{e}\ln(2) < -1,62$.
On en déduit : $g(2) = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\ln(2) - 2 \ > \ 7,3 - 1,96 - 2 = 3,34$.
On obtient alors : $g(2) > 0$.
$$\boxed{\forall x \in [2, +\infty[, \ g(x) > 0}$$
□

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.

- D'après la question ***6.a)*** : $\forall x \geqslant 2$, $g(x) > 0$. Autrement dit, pour tout $x \geqslant 2$:
$$f(x) > x$$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $x = u_n \geqslant 2$ (question ***5.***), on obtient :
$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n. \text{ La suite } (u_n) \text{ est donc (strictement) croissante.}}$$
□

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

Démonstration.

- On sait que la suite (u_n) est croissante (d'après la question ***6.b)***). Deux cas se présentent alors :
  × soit (u_n) est de plus majorée, et alors elle converge.
  × soit (u_n) n'est pas majorée, et alors elle diverge vers $+\infty$.
- Démontrons par l'absurde que (u_n) n'est pas majorée.
Supposons que la suite (u_n) est majorée.
  × Dans ce cas, la suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge vers un réel ℓ.
  D'après la question ***5.*** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.
  Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant 2$.
  × D'autre part, par définition : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
  La fonction f est continue sur $[2, +\infty[$, elle est donc en particulier continue en ℓ. Par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient : $\ell = f(\ell)$, *i.e.* $g(\ell) = 0$.

Absurde ! En effet, d'après la question ***6.a)*** : $\forall x \geqslant 2$, $g(x) > 0$. En particulier : $\forall x \geqslant 2$, $g(x) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ n'est pas majorée et diverge donc vers } +\infty}$$

Commentaire

Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :

× montrer qu'une suite N'est PAS majorée,

× montrer qu'une matrice admettant une seule valeur propre N'est PAS diagonalisable. □

8. Écrire un programme en **Scilab** qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

Démonstration.
On propose le programme suivant :

```
1  A = input('Entrez un réel A : ')
2  N = 0
3  u = 2
4  while u < A
5      N = N + 1
6      u = exp(u) - %e * log(u)
7  end
8  disp(N)
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début du programme**
  La valeur de A est choisie par l'utilisateur à l'aide de la fonction input.

```
1  A = input('Entrez un réel A : ')
```

  On initialise ensuite la variable N à 0.

```
2  N = 0
```

  La variable u qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n) est initialisée à 2 : la valeur de u_0.

```
3  u = 2
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 4 à 7 consistent à :

  1) déterminer un entier n tel que : $u_n \geqslant A$,

  2) calculer les valeurs succesives de u_n.

  On doit donc :

  1) incrémenter la variable N de 1 jusqu'à ce que : $u_n \geqslant A$. Autrement dit, on doit incrémenter la variable N de 1 tant que : $u_n < A$. Pour cela on met en place une structure while :

```
4  while u < A
```

  Puis on met à jour la variable N.

```
5      N = N + 1
```

2) calculer les valeurs successives de u_n :

```
6      u = exp(u) - %e * log(u)
```

- **Fin du programme**
À l'issue de cette boucle, la variable `N` contient le premier entier n tel que : $u_n \geqslant A$. On finit donc ce programme en affichant la valeur de cette variable.

```
8  disp(N)
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un programme **Scilab** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

□

9. a) Démontrer : $\forall x \in [2, +\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord : $\forall x \in [2, +\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x$.
La fonction $h : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$.
Sa courbe représentative $\mathcal{C}_h$ est donc située en dessous de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 2. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{array}{rcl} y & = & h(2) + h'(2)\,(x-2) \\ & = & \ln(2) + \dfrac{1}{2}\,(x-2) \end{array}$$

On en déduit :

$$\forall x \in [2, +\infty[, \quad \ln(x) \ \leqslant\ \ln(2) + \frac{1}{2}\,(x-2)$$

Ainsi, pour tout $x \in [2, +\infty[$:

$$2\ln(x) \ \leqslant\ 2\ln(2) + (x-2) = x + 2(\ln(2) - 1)$$

Or, comme : $0,6 < \ln(2) < 0,7$, alors : $2(\ln(2) - 1) < 0$. D'où : $x + 2(\ln(2) - 1) < x$.

$$\boxed{\text{Finalement, par transitivité : } \forall x \in [2, +\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x}$$

- Démontrons maintenant : $\forall x \in [2, +\infty[,\ x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.

Considérons la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{3} - x$.

× La fonction h est dérivable sur $[2, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[2, +\infty[$.

× Soit $x \in [2, +\infty[$.

$$h'(x) \ = \ \frac{\mathrm{e}^x}{3} - 1 \ = \ \frac{\mathrm{e}^x - 3}{3}$$

Comme $3 > 0$, la quantité $h'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^x - 3$.
Or, comme $x \geqslant 2$, par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x \ \geqslant\ \mathrm{e}^2 > 7,3$$

Et ainsi : $\mathrm{e}^x - 3 > 4,3 > 0$. D'où : $h'(x) > 0$.

× On obtient le tableau de variations suivant :

x	2	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	$+$	
Variations de h	$h(2)$ $\nearrow$	$+\infty$

× De plus : $h(2) = \dfrac{e^2}{3} - 2 = \dfrac{e^2 - 6}{3} > 0$ car $e^2 > 7,3$.
Or h est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Ainsi, pour tout $x \in [2, +\infty[$:

$$h(x) \ \geqslant \ h(2) \ \geqslant \ 0$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall x \in [2, +\infty[,\ x \leqslant \dfrac{e^x}{3}.}$$

Commentaire

Pour démontrer la première inégalité, il est bien évidemment possible de passer par l'étude de la fonction $\varphi : x \mapsto x - 2\ln(x)$.

- La fonction φ est dérivable sur $[2, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[2, +\infty[$.
- Soit $x \in [2, +\infty[$.

$$\varphi'(x) \ = \ 1 - \frac{2}{x} \ = \ \frac{x-2}{x}$$

  Comme $x \geqslant 2$, on en déduit : $\varphi'(x) \geqslant 0$.
- On obtient le tableau de variations suivant :

x	2	$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	$+$	
Variations de φ	$\varphi(2)$ $\nearrow$	$+\infty$

- Comme la fonction φ est croissante sur $[2, +\infty[$:

$$\forall x \in [2, +\infty, \quad \varphi(x) \geqslant \varphi(2) = 2 - 2\ \ln(2)$$

  Or : $2 - 2\ \ln(2) > 0$. Ainsi : $\forall x \in [2, +\infty[$, $\varphi(x) \geqslant 0$. D'où :

$$\forall x \in [2, +\infty[, \quad x - 2\ \ln(x) \ \geqslant \ 0$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :
$$u_{n+1} \ = \ f(u_n) \ = \ \mathrm{e}^{u_n} - \mathrm{e}\ln(u_n)$$
- De plus, d'après la question précédente :
$$\forall x \in [2, +\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{3}$$
En appliquant cette double inégalité à $x = u_n \in [2, +\infty[$, on obtient :
$$2\ln(u_n) \ \leqslant \ u_n \ \leqslant \ \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{3}$$
On en déduit :
  × d'une part : $2\ln(u_n) \leqslant u_n$. Ainsi : $-\mathrm{e}\ln(u_n) \geqslant -\dfrac{\mathrm{e}}{2} u_n$.
  × d'autre part : $u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{3}$. Ainsi : $\mathrm{e}^{u_n} \geqslant 3u_n$.

On obtient alors :
$$\underbrace{\mathrm{e}^{u_n} - \mathrm{e}\ln(u_n)}_{= u_{n+1}} \ \geqslant \ \underbrace{3u_n - \frac{\mathrm{e}}{2} u_n}_{= \frac{6-\mathrm{e}}{2}\, u_n}$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2} u_n}$$

□

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question ***9.b)*** :
$$\begin{aligned} u_{n+1} & \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2}\ u_n & & \\ & \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2}\ \frac{6-\mathrm{e}}{2}\ u_{n-1} & = & \left(\frac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^2 u_{n-1} \\ & \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2}\ \frac{6-\mathrm{e}}{2}\ \frac{6-\mathrm{e}}{2}\ u_{n-2} & = & \left(\frac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^3 u_{n-2} \\ & \dots & & \\ & \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2}\ \frac{6-\mathrm{e}}{2}\ \frac{6-\mathrm{e}}{2}\ \frac{6-\mathrm{e}}{2}\ \dots\ \frac{6-\mathrm{e}}{2}\ u_0 & = & \left(\frac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^{n+1} u_0 \end{aligned}$$
On peut démontrer rigoureusement ce résultat par récurrence (voir remarque en page suivante).

$$\boxed{\text{Comme } u_0 = 2, \text{ on obtient : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2\left(\frac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} u_n & \geqslant & 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n & \\ \text{donc} \quad \dfrac{1}{u_n} & \leqslant & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n & \begin{array}{l}\textit{(par stricte décroissance de la}\\ \textit{fonction inverse sur }]0,+\infty[,\\ \textit{car } u_n \geqslant 2 > 0 \textit{ d'après } \textbf{\textit{5.}}\textit{)}\end{array} \end{array}$$

- On obtient alors :
  × $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant \left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$
  × la série $\sum \left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\dfrac{2}{6-\mathrm{e}} \in\ ]-1,1[$.
  (en effet : $3 < 3,2 < 6-\mathrm{e} < 3,3 < 4$. D'où : $-1 < \dfrac{2}{4} < \dfrac{2}{6-\mathrm{e}} < \dfrac{2}{3} < 1$)
  Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{Par critère de comparaison de séries à termes positifs, la série } \sum \frac{1}{u_n} \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

- On pouvait aussi résoudre cette question de la façon suivante.
  On sait que les termes de la suite (u_n) sont non nuls, donc, d'après la question ***9.b)*** :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{2}{6-\mathrm{e}} \geqslant \frac{u_k}{u_{k+1}}$$

  En effectuant le produit de ces inégalités pour k variant de 0 à $n-1$, on obtient (tous les termes considérés sont positifs) :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2}{6-\mathrm{e}} \geqslant \prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{u_{k+1}} \quad \text{donc} \quad \left(\frac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n \geqslant \frac{u_0}{\cancel{u_1}}\,\frac{\cancel{u_1}}{\cancel{u_2}} \cdots \frac{\cancel{u_{n-1}}}{u_n} = \frac{u_0}{u_n} = \frac{2}{u_n}$$

  On conclut en utilisant le critère de comparaison de séries à termes positifs.
- La question portait ici sur l'application du critère de comparaison des séries à termes positifs. On pouvait se permettre de simplement citer le principe de récurrence. Détaillons quand même cette rédaction.

Commentaire

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$

  ▸ **Initialisation** :
  D'une part, $u_0 = 2$.
  D'autre part, $2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^0 = 2$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.

  ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^{n+1}$)
  D'après la question ***9.b)***, $u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n$.
  Par hypothèse de récurrence, on a : $u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$. Ainsi, par transitivité :

$$u_{n+1} \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2}\, u_n \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2}\, 2\left(\frac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n = 2\left(\frac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^{n+1}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par principe de récurrence, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$.

□

Exercice 3 (EDHEC 2020)

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y.

Démonstration.

- Dans le cas où $n = 1$, l'urne U contient une unique boule numérotée 1. Ainsi, l'événement $[X = 1]$ est toujours réalisé (autrement dit : $[X = 1] = \Omega$).
- Comme l'événement $[X = 1]$ est réalisé, on pioche 1 boule dans l'urne V. Cette expérience est une épreuve de Bernoulli de paramètre de succès p (probabilité de piocher une boule blanche).
- La v.a.r. Y prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p).}$$

Commentaire

En toute rigueur, on a ici démontré que la **loi conditionnelle de Y sachant** $[X = 1]$ est la loi $\mathcal{B}(p)$. Cependant, comme $[X = 1] = \Omega$, cela revient bien à dire que la loi de Y est la loi $\mathcal{B}(p)$. En effet :

- comme $n = 1$, on peut obtenir 0 ou 1 boule blanche en piochant dans l'urne V.
  Ainsi : $Y(\Omega) \subset \{0, 1\}$.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Y=1]) & = & \mathbb{P}([Y=1] \cap [X=1]) & \textit{(car } [X=1]=\Omega\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}([X=1])\ \mathbb{P}_{[X=1]}([Y=1]) & \\ & = & \mathbb{P}(\Omega) \times p & \textit{(car la loi conditionnelle de } Y \textit{ sachant } [X=1] \textit{ est } \mathcal{B}(p)\textit{)} \\ & = & 1 \times p \ = \ p & \end{array}$$

On retrouve bien : $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

□

On revient au cas général

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

Démonstration.

- La première partie de l'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi n issues numérotées de 1 à n.
- La v.a.r. X correspond au numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket).}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}}$$

□

3. Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $[X=k]$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X=k]}(\,[Y=i]\,)$.

Démonstration.

- Si l'événement $[X=k]$ est réalisé, c'est qu'on a pioché la boule numérotée k dans l'urne U. On effectue alors k tirages dans l'urne V.
Cette deuxième partie de l'expérience consiste en la succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité d'obtenir une boule blanche dans l'urne V).
- La v.a.r. Y correspond au nombre de succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit que la loi conditionnelle de } Y \text{ sachant } [X=k] \text{ est la loi } \mathcal{B}(k,p).}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i]) = \begin{cases} \dbinom{k}{i}\, p^i\,(1-p)^{k-i} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}}$$

□

4. On rappelle les commandes **Scilab** suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

- `grand(1, 1, 'uin', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$,
- `grand(1, 1, 'bin', n, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p,
- `grand(1, 1, 'geom', p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p,
- `grand(1, 1, 'poi', a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
p = input('entrez la valeur de p : ')
X = ------
Y = ------
```

Démonstration.

- **Début du programme**
Les valeurs de `n` et de `p` sont choisie par l'utilisateur à l'aide de la fonction `input`.

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
p = input('entrez la valeur de p : ')
```

- **Simulation de X**
D'après la question *2.*, la v.a.r. X suit la loi $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$. On stocke alors dans la variable `X` une simulation de la v.a.r. X à l'aide de l'appel suivant :

```
X = grand(1, 1, 'uin', 1, n)
```

Notons qu'on simule ainsi un tirage dans l'urne U. Le numéro de la boule piochée est donc stockée dans la variable `X`.

- **Simulation de Y**
  En ligne 3, le numéro k de la boule piochée dans l'urne U est stockée dans la variable `X`. Une fois ce nombre connu, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est la loi $\mathcal{B}(k, p)$ (d'après la question précédente). On stocke alors dans la variable `Y` une simulation de la v.a.r. Y à l'aide de l'appel suivant :

```
4  Y = grand(1, 1, 'bin', X, p)
```

□

5. a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0, n]\!]$, puis démontrer :

$$\mathbb{P}(\,[Y = 0]\,) \;=\; \frac{q\,(1 - q^n)}{n\,(1 - q)}$$

Démonstration.

- Démontrons : $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour cela, on procède par double inclusion.
  ($\subset$) On effectue au maximum n tirages dans l'urne V. Le nombre de boules blanches obtenues peut donc varier au plus entre 0 et n. Donc : $Y(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.
  ($\supset$) Montrons maintenant que la v.a.r. Y peut prendre chaque valeur entière entre 0 et n.
  Si on obtient la boule numérotée n dans l'urne U, on effectue alors n tirages dans l'urne V.
  × Si on n'obtient aucune boule blanche, alors l'événement $[Y = 0]$ est réalisé.
  × Si on obtient 1 boule blanche, alors l'événement $[Y = 1]$ est réalisé.
  × $\cdots$
  × Si on obtient n boules blanches, alors l'événement $[Y = n]$ est réalisé.

$$\boxed{\text{Finalement : } Y(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

Commentaire

- On donne dans cette démonstration des exemples de tirages qui réalisent les événements $[Y = i]$. Il était bien sûr possible d'en choisir d'autres.
  Par exemple, pour l'événement $[Y = 0]$, si on obtient la boule numérotée 2 dans l'urne U, alors on effectue un 2-tirage dans l'urne V.
  Si ce 2-tirage ne comporte pas de boule blanche, alors l'événement $[Y = 0]$ est réalisé.
- On peut un peu moins détailler la démonstration de cette question en rédigeant différemment :
  Si on obtient la boule numérotée n dans l'urne U, alors on effectue un n-tirage dans l'urne V, les tirages dans cette urne peuvent fournir de 0 à n boules blanches. Donc, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, l'évément $[X = i]$ peut être réalisé.
- Comme l'énoncé demande de **justifier** : $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, on peut penser qu'une réponse brève était attendue.
- Remarquons que pour la suite de l'exercice, notamment la détermination de la loi de Y, l'inclusion « $Y(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ » suffit.

- La famille $(\,[X=k]\,)_{k\in[\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y=0]) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k]\cap[Y=0]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k])\ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=0]) & \textit{(car : } \forall k\in[\![1,n]\!], \\
& & & \mathbb{P}([X=k])\neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n}\times\dbinom{k}{0}\ p^0\ (1-p)^{k-0} & \textit{(d'après \textbf{2.} et \textbf{3.})} \\
& = & \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(1-p)^k & \\
& = & \dfrac{1}{n}\times(1-p)^1\ \dfrac{1-(1-p)^n}{\cancel{1}-(\cancel{1}-p)} & \textit{(car : } 1-p\neq 1\textit{)} \\
& = & \dfrac{(1-p)\ \big(1-(1-p)^n\big)}{n\ p} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Comme } q=1-p\text{, on obtient : } \mathbb{P}([Y=0])=\dfrac{q\ (1-q^n)}{n\ (1-q)}.}$$

□

b) Écrire, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}(\,[Y=i]\,)$ sous forme d'une somme de $n-i+1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

Démonstration.
Soit $i\in[\![1,n]\!]$.
La famille $(\,[X=k]\,)_{k\in[\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y=i]) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k]\cap[Y=i]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k])\ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i]) & \textit{(car : } \forall k\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}([X=k])\neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n}\ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i]) & \textit{(car } X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1,n]\!])\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n}\left(\cancel{\sum\limits_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i])}+\sum\limits_{k=i}^{n}\mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i])\right) & \\
& = & \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=i}^{n}\dbinom{k}{i}\ p^i\ (1-p)^{k-i} & \textit{(d'après \textbf{3.})}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall i\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}([Y=i])=\dfrac{1}{n}\ p^i\sum\limits_{k=i}^{n}\dbinom{k}{i}\ (1-p)^{k-i}}$$

□

6. a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$. Démontrer : $i \dbinom{k}{i} = k \dbinom{k-1}{i-1}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$i \binom{k}{i} = i \, \frac{k!}{i! \, (k-i)!} = \frac{k!}{(i-1)! \, (k-i)!}$$

- De plus :

$$k \binom{k-1}{i-1} = k \, \frac{(k-1)!}{(i-1)! \, \big((k-\cancel{1}) - (i-\cancel{1})\big)!} = \frac{k!}{(i-1)! \, (k-i)!}$$

$$\boxed{i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}}$$

Commentaire

Cette relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se démontrer par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à k éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient k individus)
On souhaite alors construire une partie P à i éléments de cet ensemble contenant 1 élément distingué *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de i individus dans lequel figure* 1 *représentant de ces individus)*.
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à i éléments de E : $\dbinom{k}{i}$ possibilités.

On distingue ensuite 1 élément de cet ensemble P : $\dbinom{i}{1}$ possibilités.

(on choisit d'abord les i individus et on élit ensuite 1 *représentants de ces individus)*

Ainsi, il y a $\dbinom{k}{i} \dbinom{i}{1} = \dbinom{k}{i} \, i$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, l'élément à distinguer : $\dbinom{k}{1}$ possibilités.

On choisit ensuite $i-1$ éléments dans E, pour former P, en y ajoutant l'élément précédent : $\dbinom{k-1}{i-1}$ possibilités.

(on choisit d'abord 1 *représentant puis on leur adjoint un groupe de $i-1$ individus)*

Ainsi, il y a $\dbinom{k}{1} \dbinom{k-1}{i-1} = k \dbinom{k-1}{i-1}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat souhaité. □

b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(k \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} \, p^i \, q^{k-i} \right)$$

Démonstration.

- Tout d'abord, la v.a.r. Y admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.

- De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(Y) & = & \sum\limits_{i=0}^{n} i\, \mathbb{P}([Y=i]) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} i\, \mathbb{P}([Y=i]) & \textit{(car : } 0 \times \mathbb{P}([Y=0]) = 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} i \left(\dfrac{1}{n}\, p^i \sum\limits_{k=i}^{n} \dbinom{k}{i}\, (1-p)^{k-i} \right) & \textit{(d'après } \textbf{5.b)}\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=i}^{n} i \dbinom{k}{i}\, p^i\, (1-p)^{k-i} \right) & \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} i \dbinom{k}{i}\, p^i\, (1-p)^{k-i} & \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{k} i \dbinom{k}{i}\, p^i\, (1-p)^{k-i} \right) & \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{k} k \dbinom{k-1}{i-1}\, p^i\, (1-p)^{k-i} \right) & \textit{(d'après la question précédente)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(k \sum\limits_{i=1}^{k} \dbinom{k-1}{i-1}\, p^i\, q^{k-i} \right).}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{(n+1)\, p}{2}$.

Démonstration.
On reprend les calculs précédents.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(Y) & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(k \sum\limits_{i=1}^{k} \dbinom{k-1}{i-1}\, p^i\, q^{k-i} \right) & \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(k \sum\limits_{i=0}^{k-1} \dbinom{k-1}{i}\, p^{i+1}\, q^{k-(i+1)} \right) & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \dfrac{p}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(k \sum\limits_{i=0}^{k-1} \dbinom{k-1}{i}\, p^{i}\, q^{(k-1)-i} \right) & \\
& = & \dfrac{p}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} k\, (p+q)^{k-1} & \textit{(par formule du binôme de Newton)} \\
& = & \dfrac{p}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} k & \textit{(car : } p+q=1\textit{)} \\
& = & \dfrac{p}{\cancel{n}} \times \dfrac{\cancel{n}(n+1)}{2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}(Y) = \dfrac{(n+1)\, p}{2}.}$$

□

7. a) Établir :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \ = \ \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k\,(k-1) \sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2} \, p^i \, q^{k-i} \right)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. $Y(Y-1)$ admet une espérance car c'est une v.a.r. finie (car Y est une v.a.r. finie).
- De plus, par théorème de transfert :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(Y(Y-1)) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} i\,(i-1)\,\mathbb{P}([Y=i]) & \\
& = & \displaystyle\sum_{i=2}^{n} i\,(i-1)\,\mathbb{P}([Y=i]) & \textit{(car : } 0 \times (-1) \times \mathbb{P}([Y=0]) = 0 \\
& & & \textit{et } 1 \times 0 \times \mathbb{P}([Y=1]) = 0\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{i=2}^{n} i\,(i-1) \left(\frac{1}{n}\, p^i \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} \, (1-p)^{k-i} \right) & \textit{(d'après } \textbf{5.b)}\textit{)} \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} i\ (i-1) \binom{k}{i} \ p^i\ (1-p)^{k-i} \right) & \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{2 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} i\ (i-1) \binom{k}{i} \ p^i\ (1-p)^{k-i} & \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{i=2}^{k} i\ (i-1) \binom{k}{i} \ p^i\ (1-p)^{k-i} \right) & \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{i=2}^{k} k\ (i-1) \binom{k-1}{i-1} \ p^i\ (1-p)^{k-i} \right) & \textit{(d'après la question } \textbf{6.a)}\textit{)} \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{i=2}^{k} k\ (k-1) \binom{k-2}{i-2} \ p^i\ (1-p)^{k-i} \right) & \textit{(d'après la question } \textbf{6.a)} \\
& & & \textit{appliquée à } i-1 \textit{ et } k-1\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \geqslant 1, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \ = \ \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k\,(k-1) \sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2} \, p^i \, q^{k-i} \right).}$$

□

b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \ = \ \frac{(n^2-1)\,p^2}{3}$$

Démonstration.
Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On reprend les calculs précédents.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) & = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k\ (k-1) \sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2} \ p^i\ q^{k-i} \right) & \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k\ (k-1) \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} \ p^{i+2}\ q^{k-(i+2)} \right) & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \displaystyle\frac{p^2}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k\ (k-1) \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} \ p^{i}\ q^{(k-2)-i} \right) &
\end{array}$$

Par formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(Y) & = & \dfrac{p^2}{n} \sum\limits_{k=2}^{n} k\,(k-1)\ (p+q)^{k-1} & \\
& = & \dfrac{p^2}{n} \sum\limits_{k=2}^{n} k\,(k-1) & \textit{(car : } p+q=1\textit{)} \\
& = & \dfrac{p^2}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} (k+1)\,k & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \dfrac{p^2}{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} k \right) & \\
& = & \dfrac{p^2}{\cancel{n}} \left(\dfrac{(n-1)\,\cancel{n}\,\big(2\,(n-1)+1\big)}{6} + \dfrac{(n-1)\,\cancel{n}}{2} \right) & \\
& = & p^2\ (n-1)\ \dfrac{(2n-1)+3}{6} & \\
& = & p^2\ (n-1)\ \dfrac{2n+2}{6} & \\
& = & p^2\ (n-1)\ \dfrac{n+1}{3} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) = \dfrac{(n^2-1)\ p^2}{3}.}$$

☐

c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

Démonstration.

- D'une part, pour $n = 1$, on obtient :

$$\frac{(1^2-1)\,p^2}{3} \ = \ 0$$

- D'autre part, d'après la question , lorsque $n = 1$, alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
  - × On en déduit que la v.a.r. $Y(Y-1)$ admet une espérance, car c'est une v.a.r. finie.
  - × De plus, par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) \ = \ 0 \times (0-1) \times \mathbb{P}([Y=0]) + 1 \times 0 \times \mathbb{P}([Y=1]) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{L'expression de la question précédente reste donc valable pour } n = 1.}$$

Commentaire

On pouvait aussi remarquer que, dans le cas $n = 1$, la v.a.r. $Y(Y-1)$ est constante égale à 0. Démontrons le.
Soit $\omega \in \Omega$.
Comme $n = 1$, alors : $Y(\Omega) \subset \{0,1\}$. Deux cas se présentent alors :

- si $Y(\omega) = 0$, alors :

$$\big(Y(Y-1)\big)(\omega) \;=\; Y(\omega)\,\big(Y(\omega)-1\big) \;=\; 0 \times (-1) \;=\; 0$$

- si $Y(\omega) = 1$, alors :

$$\big(Y(Y-1)\big)(\omega) \;=\; Y(\omega)\,\big(Y(\omega)-1\big) \;=\; 1 \times 0 \;=\; 0$$

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $\big(Y(Y-1)\big)(\omega) = 0$. Ainsi la v.a.r. $Y(Y-1)$ est constante égale à 0. □

d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $\mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une variance car c'est une v.a.r. finie.
- De plus, par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y) \;=\; E\left(Y^2\right) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2$$

Or :

$$Y^2 \;=\; Y(Y-1) + Y$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}\big(Y(Y-1)+Y\big) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 \\ &= \mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) + \mathbb{E}(Y) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 \quad \textit{(par linéarité de l'espérance)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) + \mathbb{E}(Y) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2}$$

Commentaire

Rappelons qu'il n'y a pas forcément dans les sujets une croissance linéaire de la difficulté. Au contraire, chaque nouvelle partie commence généralement par une question plus simple de mise en route. On peut même trouver des questions simples en bout de sujet comme ici. Il est donc important de commencer son épreuve par une brève lecture de sujet pour les repérer.

□