DS4 (version A)

Exercice 1

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A,B,C) est une base de $\mathcal{E}$.

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est-à-dire :

$$\forall (M,N) \in \mathcal{E}^2, \ MN \in \mathcal{E}$$

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

6. On note F la matrice de f dans la base (A,B,C) de $\mathcal{E}$.
Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A,B,C) et en déduire F.

7. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

8. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

10. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

11. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

Exercice 2

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. *a)* Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

4. *a)* Étudier les variations de la fonction $u : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array} \right.$

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

6. *a)* Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array} \right.$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

8. Écrire un programme en **Scilab** qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

9. *a)* Démontrer : $\forall x \in [2,+\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\, u_n$.

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y.

On revient au cas général

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $[X = k]$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X=k]}(\,[Y = i]\,)$.

4. On rappelle les commandes **Scilab** suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

- `grand(1, 1, 'uin', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$,
- `grand(1, 1, 'bin', n, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p,
- `grand(1, 1, 'geom', p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p,
- `grand(1, 1, 'poi', a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
p = input('entrez la valeur de p : ')
X = ------
Y = ------
```

5. ***a)*** Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0, n]\!]$, puis démontrer :

$$\mathbb{P}(\,[Y = 0]\,) \;=\; \frac{q\,(1 - q^n)}{n\,(1 - q)}$$

b) Écrire, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}(\,[Y = i]\,)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6. ***a)*** Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$. Démontrer : $i \dbinom{k}{i} = k \dbinom{k-1}{i-1}$.

b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(k \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1}\, p^i\, q^{k-i} \right)$$

c) En déduire : $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{(n+1)\,p}{2}$.

7. a) Établir :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \;=\; \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k\,(k-1) \sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2}\, p^i\, q^{k-i} \right)$$

b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \;=\; \frac{(n^2-1)\,p^2}{3}$$

c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $\mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big)$ et $\mathbb{E}(Y)$.