DS3

Le but du problème est d'étudier le renouvellement d'un des composants d'un système complexe (une machine, un réseau de distribution d'énergie etc...) formé d'un assemblage de différentes pièces susceptibles de tomber en panne. On s'intéresse donc à une de ces pièces susceptibles de se casser ou de tomber en panne et on se place dans la situation idéale où dès que la pièce est défectueuse, elle est immédiatement remplacée. Dans une première partie, on étudie quelques propriétés fondamentales des variables aléatoires discrètes. Puis, dans une deuxième partie, on étudie la probabilité de devoir changer la pièce un certain jour donné. Enfin, dans une troisième partie on cherche à estimer le temps de fonctionnement du système avec un certain nombre de pièces de rechange à disposition.
Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.
La deuxième partie peut être traitée en admettant si besoin les résultats de la première partie.

Première partie

Dans cette première partie, on étudie les propriétés asymptotiques d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. ***a)*** Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j])$$

- **1 pt :** $[X \geqslant j] = [X > j] \cup [X = j]$
- **1 pt :** X **à valeurs entières donc** $[X \geqslant j] = [X > j-1]$
- **1 pt :** $[X > j]$ **et** $[X = j]$ **incompatibles**

b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X = j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) - p\,\mathbb{P}([X > p])$$

- **1 pt : décalage d'indice**
- **1 pt : télescopage**

2. ***a)*** On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = \mu$.

i. Justifier la convergence de la série de terme général $k\,\mathbb{P}([X = k])$.

- **1 pt :** X **admet une espérance donc la série converge absolument**
- **1 pt : convergence absolue $\Rightarrow$ convergence**

ii. Montrer que :

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([X = k]) = 0$$

- **1 pt : relation de Chasles car** $\sum\limits_{k\geqslant 1} k\,\mathbb{P}([X = k])$ **convergente**
- **1 pt : passage à la limite**

iii. En déduire que :

$$\lim_{p\to+\infty} p\,\mathbb{P}([X>p]) = 0$$

- **1 pt :** $[X>p] = \bigcup\limits_{k=p+1}^{+\infty} [X=k]$
- **1 pt : incompatibilité des** $[X=k]$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} p\,\mathbb{P}([X=k]) \leqslant \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([X=k])$
- **1 pt : théorème d'encadrement (avec résultat qst précédente)**

iv. Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ converge.

- **1 pt : d'après *1.b)*** $\sum\limits_{k=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) = \sum\limits_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X=j]) - p\,\mathbb{P}([X>p])$
- **1 pt : les 2 membres de droite convergent d'après *2.a)(i)* et la qst précédente**

v. Montrer que : $\mu = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$.

- **1 pt : passage à la limite dans l'égalité de *1.b)***

b) On suppose que $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$ converge.

i. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\geqslant 1}$ définie par :

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j])$$

- **1 pt :** (v_p) **croissante car une probabilité est toujours positive**

ii. Comparer $\sum\limits_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X=j])$ et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$.

- **1 pt : d'après *1.b)*** $\sum\limits_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X=j]) = \sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - p\,\mathbb{P}([X>p]) \leqslant v_p$
- **1 pt :** $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j]) = \sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) + \sum\limits_{j=p}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$
- **1 pt :** $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) \leqslant \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$

iii. En déduire que X admet une espérance.

- **1 pt : convergence absolue**
- **1 pt :** $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X=j])\right)$ **croissante**
- **1 pt :** $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X=j])\right)$ **majorée par** $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$ **d'après la qst précédente**

c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge.

- **1 pt : $\Rightarrow$ d'après *2.a)***
- **1 pt : $\Leftarrow$ d'après *2.b)***

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}([X > j]) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \qquad (*)$$

a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

- **1 pt : $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = j]) \geqslant 0$**
- **2 pts : $\sum\limits_{j=1}^{p} \mathbb{P}([X = j]) = 1$ (dont 1 pt pour le télescopage)**

b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

- **1 pt : d'après *2.c)*, la v.a.r. X admet une espérance ssi $\sum\limits_{j \geqslant 0} \mathbb{P}([X > j])$ est convergente**
- **3 pts : critère d'équivalence des SATP**

c) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)$$

- **1 pt**

d) i. Étudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0, 1]$.

- **1 pt : f dérivable sur $[0, 1]$**
- **1 pt : $\forall x \in [0, 1]$, $f'(x) = \alpha \, \dfrac{1 - (1+x)^{\alpha+1}}{(1+x)^{\alpha+1}}$**
- **1 pt : $\forall x \in [0, 1]$, $f'(x) \leqslant 0$ donc f est décroissante sur $[0, 1]$**

ii. Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$$

- **1 pt : d'après la qst précédente : $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \leqslant f(0) = 0$**
- **1 pt : on applique l'inégalité à $x = \dfrac{1}{j}$**
- **1 pt : fin du calcul**

e) Montrer, en utilisant le résultat de ***3.c)***, que :

$$\lim_{j \to +\infty} j^{\alpha+1} \, \mathbb{P}([X = j]) = \alpha$$

- **1 pt : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ donc admet un DL d'ordre 1 en 0 : $(1+x)^{-\alpha} = 1 - \alpha\, x + x\, \varepsilon(x)$**
- **1 pt : on peut appliquer ce DL à $x = \dfrac{1}{j}$ car $\lim\limits_{j \to +\infty} \dfrac{1}{j} = 0$**
- **1 pt : conclusion avec théorème de composition de limites**

f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

- **1 pt : convergence absolue**
- **1 pt : $j^2\, \mathbb{P}([X = j]) \underset{j \to +\infty}{\sim} \alpha \, \dfrac{1}{j^{\alpha - 1}}$**
- **2 pts : critère d'équivalence des SATP**

Deuxième partie : Étude de la probabilité de panne un jour donné.

Dans cette deuxième partie, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ mutuellement indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du $i^{\text{ème}}$ composant en fonctionnement. Soit k un entier naturel non nul. On note $T_k = X_1 + ... + X_k$. T_k représente donc le jour où le $k^{\text{ème}}$ composant tombe en panne. On fixe un entier naturel n non nul représentant un jour donné et on considère l'événement A_n : « le composant en place le jour n tombe en panne » c'est-à-dire A_n : « il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$ », et on se propose d'étudier $\mathbb{P}(A_n)$.

4. Pour tout entier naturel non nul j, on note $p_j = \mathbb{P}([X_1 = j])$ et $u_j = \mathbb{P}(A_j)$. On suppose que pour tout entier naturel non nul j, on a $p_j \neq 0$. On pose de plus par convention $u_0 = 1$.

a) Montrer que : $u_1 = p_1$.

- **1 pt :** $X_1(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$
- **1 pt :** $[X_1 = 1] = A_1$

b) i. Montrer que : $A_2 = [X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$.

- **2 pts : $\subset$ (1 pt par cas)**
- **1 pt :** $\supset$

ii. En déduire u_2 en fonction de p_1 et p_2.

- **1 pt :** $[X_1 = 2]$ **et** $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ **incompatibles**
- **1 pt :** X_1 **et** X_2 **indépendantes**
- **1 pt :** X_1 **et** X_2 **ont même loi**

c) Pour tout entier naturel i, on pose $\tilde{X}_i = X_{i+1}$.

i. Montrer que les variables $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1.

- **1 pt : les $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes**
- **1 pt : les $\tilde{X}_i$ sont indépendantes de X_1**
- **1 pt : les $\tilde{X}_i$ ont même loi que X_1**

ii. Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n. Montrer que :

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j\geqslant 1} \left[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k\right]$$

- **1 pt :** $A_n = [X_1 = n] \ \cup \ \bigcup_{j\geqslant 2} [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n]$
- **1 pt :** $[X_1 = k] \cap A_n = \varnothing \ \cup \ \bigcup_{j\geqslant 2} \Big([X_1 = k] \ \cap \ [k + X_2 + \ldots + X_j = n] \Big)$ **par distributivité de $\cap$ sur $\cup$**
- **1 pt :** $A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j\geqslant 1} \left[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k\right]$ **par décalage d'indice et définition des $\tilde{X}_i$**

iii. En déduire que pour tout entier naturel k non nul strictement inférieur à n :

$$\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k})$$

- **1 pt : définition probabilité conditionnelle**
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \dfrac{\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{j\geqslant 1} [X_1=k] \ \cap \ \Big[\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\ldots+\tilde{X}_j = n-k\Big]\Big)}{\mathbb{P}([X_1=k])}$
- **1 pt : par incompatibilité puis indépendance :**
$\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{j\geqslant 1} [X_1=k] \cap \Big[\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\ldots+\tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) = \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}([X_1=k])\times\mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\ldots+\tilde{X}_j = n-k\Big]\Big)$
- **1 pt : par lemme des coalition :**
$\sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}([X_1=k])\times\mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\ldots+\tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) = \mathbb{P}([X_1=k])\times\sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\ldots+\tilde{X}_j = n-k\Big]\Big)$
- **1 pt : comme $\sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{X}_i$ et $\sum\limits_{j=1}^{n} X_i$ ont même loi :**
$\mathbb{P}([X_1=k])\times\sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\ldots+\tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) = \mathbb{P}([X_1=k])\times\sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1+X_2+\ldots+X_j = n-k]\Big)$
- **1 pt : fin du calcul**

d) Montrer que :

$$u_n = u_{n-1}\ p_1 + \ldots + u_0\ p_n$$

- **1 pt :** $([X_1=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ **est un SCE**
- **1 pt : FPT**
- **1 pt :** $\forall k \geqslant n+1$**,** $[X_1=k]\cap A_n = \varnothing$
- **1 pt :** $[X_1=n] \subset A_n$
- **1 pt :** $\forall k \in \mathbb{N}^*$**,** $\mathbb{P}([X_1=k]) \neq 0$
- **1 pt : fin du calcul avec le résultat de la qst précédente**

e) En **Scilab**, soit $P = [p_1, p_2, ..., p_n]$ le vecteur ligne tel que $P(j) = p_j$ pour j dans $[\![1, n]\!]$.
Écrire un programme en **Scilab** qui calcule u_n à partir de P.

- **7 pts :**
  - × **1 pt : structure de fonction**
  - × **1 pt : initilisation**
  - × **2 pts : 1ère boucle for**
  - × **2 pts : 2ème boucle for**
  - × **1 pt : mise à jour variable de sortie**

```
function res = calcSuiteU(P)
    [m, n] = size(P) // ou n = length(P)
    U = zeros(1, n+1) // on crée un vecteur contenant n+1 zéros
    U(1) = 1 // la première case contient la valeur de u-0
    for k = 1:n
        S = 0 // variable auxiliaire
        for j = 1:k
            S = S + U(k+1-j) * P(j)
        end
        U(k+1) = S
    end
    res = U(n+1) // on renvoie u-n
endfunction
```

5. Soit λ un réel appartenant à $]0, 1[$.

Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi géométrique de paramètre λ.
Pour tout entier naturel j non nul, on a donc $\mathbb{P}([X_1 = j]) = \lambda(1-\lambda)^{j-1}$.

a) Calculer $\mathbb{P}([X_1 > k])$ pour tout entier naturel k non nul.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_1 > k]) = 1 - \mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$
- **1 pt :** $[X_1 \leqslant k] = \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]$ **car** X_1 **à valeurs entières**
- **1 pt : incompatibilité**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) = \lambda \sum\limits_{i=0}^{k-1} (1-\lambda)^i = \lambda \dfrac{1-(1-\lambda)^k}{1-(1-\lambda)}$ **par décalage d'indice et car** $1-\lambda \neq 1$

b) Calculer $\mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 = k+1])$.

- **1 pt : définition probabilité conditionnelle**
- **1 pt :** $[X_1 = k+1] \subset [X_1 > k]$
- **1 pt : avec la qst précédente :** $\mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 = k+1]) = \lambda = \mathbb{P}([X_1 = 1])$

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $\mathbb{P}(A_n) = \lambda$.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité (1 pt pout utilisation *4.d)*, 1 pt pour convention** $u_0 = 1$**, 1 pt pour le reste)**

6. On suppose dans cette question que p_1 vérifie $0 < p_1 < 1$ et que $p_2 = 1 - p_1$.
Pour simplifier, on posera $p = p_1 = 1 - p_2$.

a) Que vaut p_i pour i supérieur ou égal à 3 ?

- **1 pt : comme** $([X_1 = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ **SCE, alors** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k]) = 1$
- **1 pt : comme** $p_1 + p_2 = 1$**, alors** $\sum\limits_{k=3}^{+\infty} p_i = 0$
- **1 pt : par positivité des** p_i **:** $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $p_i = 0$

b) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$.

- **1 pt :** $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k}\, p_k$ **d'après** ***4.d)***
- **1 pt :** $u_n = u_{n-1}\, p + u_{n-2}\,(1-p)$ **car** $\forall k \geqslant 3$**,** $p_i = 0$
- **1 pt : écriture matricielle**

c) On admet : $M = PDP^{-1}$ où :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix}$$

i. Déterminer P^{-1}.

- **1 pt :** $P^{-1} = \dfrac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

ii. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$M^{n-1} = \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}\begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **1 pt : par récurrence immédiate :** $M^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$
- **1 pt :** $PD^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & (p-1)^n \\ 1 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix}$ **ou** $D^{n-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -(p-1)^{n-1} & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $PD^{n-1}P^{-1} = \dfrac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \dfrac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) i. Exprimer u_n en fonction de p et de n.

- **1 pt : par récurrence immédiate :** $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt : d'après la qst précédente :** $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} -p^2+2p-1 \\ -p+1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $u_n = \dfrac{1}{2-p} \left(1 - (p-1)^{n+1}\right)$

ii. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

- **1 pt :** $|p-1| < 1$ **donc** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2-p}$

Troisième partie : Étude de la durée de fonctionnement.

Comme dans la partie précédente, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \geqslant 1}$ indépendantes et de même loi, telle que pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du i-ème composant en fonctionnement.
Soit k un entier naturel non nul. On étudie dans cette partie la durée de fonctionnement prévisible du système si on a k composants à disposition (y compris celui installé au départ).
On notera toujours $T_k = X_1 + ... + X_k$.
On suppose dans cette partie qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}\left([X_1 > j]\right) = \frac{1}{(j+1)^\alpha}$$

En particulier, dans toute cette partie, X_1 admet une espérance, on l'on notera $\mu = \mathbb{E}(X_1)$.

7. Que vaut $\mathbb{E}(T_k)$?

- **1 pt : T_k admet une espérance comme somme de v.a.r. qui en admettent une**
- **1 pt : linéarité de l'espérance + les X_i ont même loi**
- **1 pt : $\mathbb{E}(T_k) = k\,\mu$**

8. On suppose, **dans cette question**, que α est strictement supérieur à 2. La variable aléatoire X_1 admet donc une variance σ^2.

a) Calculer $\mathbb{V}(T_k)$.

- **1 pt : T_k admet une variance comme somme de v.a.r. qui en admettent une**
- **1 pt : X_i indépendantes**
- **1 pt : les X_i ont même loi**
- **1 pt : $\mathbb{V}(T_k) = k\,\sigma^2$**

b) On admet le résultat suivant, appelé *inégalité de Bienaymé-Tchebychev* : pour toute v.a.r. Y admettant une variance, on a :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(\,[\,|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant a]\,) \;\leqslant\; \frac{\mathbb{V}(Y)}{a^2}$$

Montrer que pour tout réel ε strictement positif,

$$\mathbb{P}\left([|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon]\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$$

- **1 pt : T_k admet une variance**
- **1 pt : on applique Bienaymé-Tchebychev à** $a = k\,\varepsilon > 0$

c) Déduire que, pour tout réel strictement positif ε, on a :

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{T_k}{k} \in \,]\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon[\right]\right) = 1$$

- **1 pt :** $[\,|T_k - k\,\mu| < k\varepsilon] = \left[\frac{T_k}{k} \in \,]\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon[\right]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([\,|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon]) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[\frac{T_k}{k} \in \,]\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon[\right]\right)$
- **1 pt : théorème d'encadrement avec la qst précédente**

9. On suppose maintenant uniquement que $\alpha > 1$ et donc que X_1 n'a pas nécessairement de variance d'où l'impossibilité d'appliquer la méthode précédente. On va mettre en œuvre ce qu'on appelle une méthode de troncation.
On fixe un entier naturel m strictement positif. Pour tout entier naturel non nul i, on définit deux variables aléatoires $Y_i^{(m)}$ et $Z_i^{(m)}$ de la façon suivante

$$Y_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i \leqslant m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad Z_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i > m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que $X_i = Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}$.

- **2 pts : 1 pt par cas**

b) i. En utilisant la question ***3.d)ii.***, montrer que :

$$\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \ \leqslant \ \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

- **1 pt :** $Z_1^{(m)}(\Omega) = \{0\} \cup [\![m+1, +\infty [\![$
- **1 pt : convergence absolue de la série** $\displaystyle\sum_{i \geqslant m+1} i\,\mathbb{P}\left(\left[Z_1^{(m)} = i\right]\right)$
- **1 pt :** $\forall i \geqslant m+1$, $\left[Z_1^{(m)} = i\right] = [X_1 = i]$ **donc** $Z_1^{(m)}$ **admet une espérance car** X_1 **en admet une**
- **1 pt :** X_1 **vérifie les conditions de la qst** ***3.*** **donc** $i\,\mathbb{P}([X_1 = i]) \leqslant \dfrac{\alpha}{i^\alpha}$

ii. Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \ \leqslant \ \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx$$

- **1 pt :** $\dfrac{\alpha}{i^\alpha} \geqslant \dfrac{\alpha}{x^\alpha} \geqslant \dfrac{\alpha}{(i+1)^\alpha}$ **(avec justifications)**
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant** ($i \leqslant i+1$)
- **1 pt : sommation des inégalités de droite de** m **à** N **et relation de Chasles**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_m^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ **est une intégrale de Riemann, impropre en** $+\infty$ **d'exposant** $\alpha > 1$**, donc convergente. Idem pour la série** $\displaystyle\sum_{i \geqslant m+1} \frac{1}{i^\alpha}$

iii. Calculer :

$$\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx$$

- **2 pts :** $\displaystyle\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx \ = \ \frac{\alpha}{\alpha-1}\ \frac{1}{m^{\alpha-1}}$

iv. En déduire que :

$$\lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) = 0$$

- **1 pt :** $Z_1^{(m)}$ **à valeurs entières, donc :** $Z_1^{(m)} \geqslant 0$**. Par croissance de l'espérance :** $\mathbb{E}(Z_1^{(m)}) \geqslant 0$
- **1 pt : d'après** ***9.b)(ii)*** **et** ***9.b)(iii)*** **:** $\mathbb{E}(Z_1^{(m)}) \leqslant \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\ \dfrac{1}{m^{\alpha-1}}$
- **1 pt : théorème d'encadrement**

v. Montrer que

$$\lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}\big(Y_1^{(m)}\big) = \mu$$

- **1 pt : d'après** ***9.a)*** **:** $Y_1^{(m)} = X_1 - Z_1^{(m)}$
- **1 pt :** $Y_1^{(m)}$ **admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent une**
- **1 pt : linéarité de l'espérance**
- **1 pt : passage à la limite quand** $m \to +\infty$

c) i. Montrer que
$$\big(Y_1^{(m)}\big)^2 \leqslant m X_1$$

- **2 pts : 1 pt par cas**

ii. En déduire que
$$\mathbb{V}\big(Y_1^{(m)}\big) \leqslant m\mu$$

- **1 pt :** $Y_1^{(m)}(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$
- **1 pt :** $Y_1^{(m)}$ **est finie donc admet une variance**
- **1 pt : par formule de KH :** $V\left(Y_1^{(m)}\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\left(Y_1^{(m)}\right)^2\right)$
- **1 pt : par croissance de l'espérance :** $\mathbb{E}\left(\left(Y_1^{(m)}\right)^2\right) \leqslant \mathbb{E}(m\, X_1) = m\mu$

d) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel m_0 non nul tel que pour tout entier naturel m supérieur ou égal à m_0,
$$\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \leqslant \varepsilon$$

Jusqu'à la fin du problème, m **désignera un entier supérieur ou égal à** m_0**.**

- **1 pt : définition de limite**

e) On note, pour tout entier naturel k non nul
$$U_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Y_i^{(m)} \qquad \text{et} \qquad V_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Z_i^{(m)}$$

Vérifier que :
$$T_k = U_k^{(m)} + V_k^{(m)}$$

- **1 pt**

f) i. Montrer que :
$$\mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big) \ \leqslant \ k\ \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}$$

- **1 pt :** $V_k^{(m)}$ **admet une espérance comme somme de v.a.r. qui en admettent une**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(V k^{(m)}) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(Z_1^{(m)}) = k\, \mathbb{E}(Z_1^{(m)})$
- **1 pt : majoration avec les qsts *9.b)(ii)* et *9.b)(iii)***

ii. En déduire que :
$$\mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon\right]\right) \ \leqslant \ \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$$

- **non barêmée : inégalité de Markov non encore vue**

g) (i) Montrer que :
$$\mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big) \ \geqslant \ k\mu - k\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}$$

- **1 pt :** $U_k^{(m)} = T_k - V_k^{(m)}$ **admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent une**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(U_k^{(m)}) \geqslant k\mu - k\ \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\ m^{1-\alpha}$ **d'après *7.* et *9.f)(i)***

(ii) En déduire que :

$$\left| \mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu \right| \leqslant k\varepsilon$$

- **1 pt :** $\mathbb{E}(V_k^{(m)}) \geqslant 0$ **donc** $\left|\mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu\right| = -\left(\mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu\right)$
- **1 pt : conclusion avec la qst précédente et *9.d)***

(iii) Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\right]\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon\right]\right)$$

- **2 pts :** $\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\right] \subset \left[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon\right]$
- **1 pt : croissance de** $\mathbb{P}$

(iv) Montrer que :

$$\mathbb{V}\big(U_k^{(m)}\big) \leqslant km\mu$$

- **1 pt :** $Y_i^{(m)}$ **admet une variance d'après *9.c)(ii)***
- **1 pt :** $Y_i^{(m)}$ **indépendantes par lemme des coalitions**
- **1 pt :** $U_k^{(m)}$ **admet une variance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent une.**
- **1 pt : indépendance des** $Y_i^{(m)}$ **et** $Y_i^{(m)}$ **ont même loi**
- **1 pt : conclusion avec qst *9.c)(ii)***

(v) En déduire que :

$$\mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

- **1 pt : on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à** $U_k^{(m)}$ **qui admet une variance et** $k\varepsilon > 0$
- **1 pt : utilisation qst *9.g)(iii)* et qst précédente**

h) (i) Montrer que pour tout couple d'événements A et B dans $\mathcal{A}$, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

- **1 pt : formule du crible**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant 1$

(ii) En appliquant l'inégalité précédente aux événements :

$$A = \left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right] \quad \text{et} \quad B = \left[U_k^{(m)} \in \,]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)[\right]$$

montrer que :

$$\mathbb{P}\left([T_k \in \,]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[\,]\right) \geqslant \mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[U_k^{(m)} \in \,]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)[\right]\right) - 1$$

- **1 pt : application de la qst précédente aux** A **et** B **proposés**
- **2 pts :** $A \cap B \subset [T_k \in \,]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[\,]$

(iii) Déduire des questions précédentes que pour tout réel ε strictement positif, et pour tout entier m supérieur ou égal à m_0, on a pour tout entier naturel k non nul :

$$\mathbb{P}\left([\ T_k \in \,]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[\ ]\ \right) \ \geqslant\ 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

- **1 pt : d'après *9.f)(ii)* :** $\mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right]\right) \ \geqslant\ 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\ \dfrac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$
- **1 pt : d'après *9.g)(v)* car** $m \geqslant m_0$ **:** $\mathbb{P}\left([\ |U_k^m - k\mu|\ <\ 2k\varepsilon]\right) \ \geqslant\ 1 - \dfrac{m\mu}{k\varepsilon^2}$
- **1 pt :** $[\ |U_k^m - k\mu|\ <\ 2k\varepsilon]\ =\ [\ U_k^m \in \,]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)[\ ]$
- **1 pt : utilisation de la qst précédente et conclusion**

(iv) Pour k assez grand, appliquer l'inégalité précédente à un entier $m_k \in [\sqrt{k}, 2\sqrt{k}]$ et conclure que :

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{T_k}{k} \in \,]\mu - 3\varepsilon, \mu + 3\varepsilon[\right]\ \right) = 1$$

- **1 pt : choix de k tel que $\sqrt{k}\ \geqslant\ m_0$ et on considère $m_k\ \in\ [\sqrt{k}, \sqrt{2k}]$. Alors :** $m_k \geqslant \sqrt{k} \geqslant m_0$
- **1 pt : on applique inégalité précédente en $m = m_k$**
- **1 pt :** $-\dfrac{\alpha}{(\alpha-1)\ \varepsilon}\ \dfrac{1}{m_k^{\alpha-1}}\ \geqslant\ -\dfrac{\alpha}{(\alpha-1)\ \varepsilon}\ \dfrac{1}{(\sqrt{k})^{\alpha-1}}$
- **1 pt :** $1\ \geqslant\ \mathbb{P}\left(\left[\ \dfrac{T_k}{k} \in \,]\mu - 3\varepsilon, \mu + 3\varepsilon[\ \right]\ \right)\ \geqslant\ 1 - \dfrac{\alpha}{(\alpha-1)\ \varepsilon}\ \dfrac{1}{(\sqrt{k})^{\alpha-1}} - 2\ \dfrac{\mu}{\sqrt{k}\ \varepsilon^2}$
- **1 pt : théorème d'encadrement**