DS2

Exercice 1 (EML 2010)

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2

- On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer AFA, AGA, AHA.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} AFA &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned} AGA &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} AHA &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \ AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \text{ et } AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}}$$

□

2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.

Démonstration.

- Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{S}_2 &\Leftrightarrow {}^tM = M \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& a \\ c &=& b \\ b &=& c \\ d &=& d \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \ c = b \right. \end{aligned}$$

- On en déduit alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_2 & = & \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid c = b\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid (a,b,d) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \{a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b,d) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \big\{a \cdot F + b \cdot G + d \cdot H \mid (a,b,d) \in \mathbb{R}^3\big\} \;=\; \mathrm{Vect}\,(F,G,H) \end{array}$$

$\boxed{\mathcal{S}_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{, donc un espace vectoriel.}}$

Commentaire

- Pour faciliter la compréhension, on a beaucoup détaillé l'obtention de $\mathcal{S}_2$. Cependant, on peut commencer la question en écrivant directement : $\mathcal{S}_2 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.
- Si la rédaction précédente est celle attendue, il arrive parfois qu'on ne puisse pas l'utiliser (dans certains cas, l'ensemble étudié ne s'écrit pas naturellement comme espace vectoriel engendré par une partie). Il est donc important de savoir utiliser la méthode consistant à revenir à la définition de sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Rappelons ci-dessous la rédaction.

(i) $\mathcal{S}_2 \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(ii) $\mathcal{S}_2 \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2$.

(iii) Démontrons que $\mathcal{S}_2$ est stable par combinaison linéaire.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M_1, M_2) \in {\mathcal{S}_2}^2$.

× Comme $M_1 \in \mathcal{S}_2$, il existe $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$.

× Comme $M_2 \in \mathcal{S}_2$, il existe $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$.

Démontrons : $\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2 \in \mathcal{S}_2$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2 & = & \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \lambda_1\, a_1 & \lambda_1\, b_1 \\ \lambda_1\, b_1 & \lambda_1\, c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2\, a_2 & \lambda_2\, b_2 \\ \lambda_2\, b_2 & \lambda_2\, c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\, a_1 + \lambda_2\, a_2 & \lambda_1\, b_1 + \lambda_2\, b_2 \\ \lambda_1\, b_1 + \lambda_2\, b_2 & \lambda_1\, c_1 + \lambda_2\, c_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2 \end{array}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{S}_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$

- Dans le point ***(iii)***, il s'agit de démontrer que la matrice $\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2$ est une matrice symétrique carrée (d'ordre 2). Pour ce faire, on peut aussi se servir des propriétés de l'application transposée. Plus précisément :

$$\begin{array}{rcll} {}^t\big(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2\big) & = & \lambda_1 \cdot {}^tM_1 + \lambda_2 \cdot {}^tM_2 & \textit{(par linéarité de l'application transposée)} \\ & = & \lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2 & \textit{(car } M_1 \textit{ et } M_2 \textit{ sont symétriques)} \end{array}$$

Ainsi, on a bien : $\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2 \in \mathcal{S}_2$.

- La famille (F, G, H) est :
  - × génératrice de $\mathcal{S}_2$, d'après le point précédent,
  - × libre.
    Démontrons ce point. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
    Supposons : $\lambda_1 \cdot F + \lambda_2 \cdot G + \lambda_3 \cdot H = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ $(*)$

$$\text{Or :} \qquad (*) \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc la famille (F, G, H) est libre.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (F, G, H) \text{ est une base de } \mathcal{S}_2.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(\mathcal{S}_2) = \text{Card}\big((F, G, H)\big) = 3.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (F, G, H) est un ensemble qui contient 3 vecteurs (F, G, H sont des vecteurs car sont des éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$). Cette famille est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\text{Card}\big((F, G, H)\big) = 3$).
- L'ensemble $\text{Vect}(F, G, H)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (F, G, H). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (F, G, H) d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de cet espace vectoriel de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\text{Card}\big(\text{Vect}(F, G, H)\big)}$ et $\cancel{\dim\big((F, G, H)\big)}$ n'ont aucun sens !

3. a) Montrer : $\forall S \in \mathcal{S}_2, \; ASA \in \mathcal{S}_2$.

Démonstration.
Soit $S \in \mathcal{S}_2$.

$$\begin{aligned} {}^t(ASA) &= {}^t((AS)A) \\ &= {}^tA \, {}^t(AS) \\ &= {}^tA \, {}^tS \, {}^tA \\ &= ASA \qquad \textit{(car } {}^tA = A \textit{ et } {}^tS = S\textit{)} \end{aligned}$$

Donc $ASA \in \mathcal{S}_2$.

$$\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_2, \; ASA \in \mathcal{S}_2}$$

Commentaire

- On applique ici la formule suivante :

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2, \ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$$

Il faut bien faire attention à l'ordre d'apparition des matrices dans cette formule :

$${}^t(AB) \cancel{=} {}^tA^tB$$

- En particulier, si A et B sont des matrices symétriques, on obtient :

$${}^t(AB) \ = \ {}^tB^tA \ = \ BA$$

Or, le produit de matrices n'est pas commutatif. Cela signifie qu'il existe des matrices A et B telles que : $AB \neq BA$. Par exemple les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, vérifient :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a exhibé un couple de matrices symétriques (A, B) dont le produit n'est pas une matrice symétrique (${}^t(AB) \neq BA$). On peut en conclure que $\mathcal{S}_2$ n'est pas stable par produit. □

b) Déterminer le rang de la famille (AFA, AGA, AHA).

Démonstration.

- Notons tout d'abord que, d'après la question ***1.*** :
  - $AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot H$,
  - $AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = 4 \cdot G + 12 \cdot H$,
  - $AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = 4 \cdot F + 6 \cdot G + 9 \cdot H$.
- Ainsi :

$$\begin{array}{rll} & \mathrm{rg}(AFA, AGA, AHA) & \\ = & \mathrm{rg}(4 \cdot H, 4 \cdot G + 12 \cdot H, 4 \cdot F + 6 \cdot G + 9 \cdot H) & \\ = & \mathrm{rg}(H, G + 3 \cdot H, 4 \cdot F + 6 \cdot G + 9 \cdot H) & \textit{(on met à jour la } 1^{\text{ère}} \textit{ et } 2^{\text{ème}} \textit{ matrice en les multipliant par } \frac{1}{4}\textit{)} \\ = & \mathrm{rg}\left(H, (G + \cancel{3 \cdot H}) - \cancel{3 \cdot H}, (4 \cdot F + 6 \cdot G + \cancel{9 \cdot H}) - \cancel{9 \cdot H}\right) & \textit{(on met à jour la } 2^{\text{ème}} \textit{ (resp. } 3^{\text{ème}}\textit{) matrice en lui retirant } 3 \textit{ (resp. } 9\textit{) fois la } 1^{\text{ère}}\textit{)} \\ = & \mathrm{rg}(H, G, 4 \cdot F + 6 \cdot G) & \\ = & \mathrm{rg}\left(H, G, (4 \cdot F + \cancel{6 \cdot G}) - \cancel{6 \cdot G}\right) & \textit{(on met à jour la } 3^{\text{ème}} \textit{ matrice en lui retirant } 6 \textit{ fois la } 2^{\text{ème}}\textit{)} \\ = & \mathrm{rg}(H, G, 4 \cdot F) \ = \ \mathrm{rg}(H, G, F) & \textit{(on met à jour la } 3^{\text{ère}} \textit{ matrice en la multipliant par } \frac{1}{4}\textit{)} \\ = & \mathrm{rg}(F, G, H) & \end{array}$$

Or la famille (F, G, H) est libre d'après la question ***2.***. Ainsi : $\mathrm{rg}(F, G, H) = 3$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{rg}(AFA, AGA, AHA) = 3.}$$

Commentaire

- Dans le dernier point, on s'est servi de la propriété qui stipule que toute famille libre $\mathcal{F}$ vérifie : $\mathrm{rg}\big(\mathcal{F}\big) = \mathrm{Card}\big(\mathcal{F}\big)$. Rappelons la démonstration dans le cas où $\mathcal{F} = (F, G, H)$.
  Tout d'abord, par définition du rang d'une famille de vecteurs, on a :
  $$\mathrm{rg}(F, G, H) \ = \ \dim(\mathrm{Vect}\,(F, G, H))$$
  De plus, par définition de $\mathrm{Vect}\,(\cdot)$, la famille (F, G, H) engendre $\mathrm{Vect}\,(F, G, H)$.
  On obtient ainsi que la famille (F, G, H) est :
  - × génératrice de $\mathrm{Vect}\,(F, G, H)$,
  - × libre d'après la question ***2.***

  La famille (F, G, H) est donc une base de $\mathrm{Vect}\,(F, G, H)$. On en déduit :
  $$\mathrm{rg}(F, G, H) \ = \ \dim(\mathrm{Vect}\,(F, G, H)) \ = \ \mathrm{Card}\big((F, G, H)\big) \ = \ 3$$

- On peut rédiger cette question de deux autres manières.
  Une première possibilité est de rédiger directement avec les matrices.
  $$\begin{array}{cll}
  & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\right) & \\
  = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\right) & \textit{(on met à jour la } 1^{\text{ère}} \textit{ et } 2^{\text{ème}} \textit{ matrice en les multipliant par } \frac{1}{4}\textit{)} \\
  = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\right) & \textit{(on met à jour la } 2^{\text{ème}} \textit{ matrice en lui retirant } 3 \textit{ fois la } 1^{\text{ère}}\textit{)} \\
  = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\right) & \textit{(on met à jour la } 3^{\text{ème}} \textit{ matrice en lui retirant } 9 \textit{ fois la } 1^{\text{ère}}\textit{)} \\
  = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & \textit{(on met à jour la } 3^{\text{ème}} \textit{ matrice en lui retirant } 6 \textit{ fois la } 1^{\text{ère}}\textit{)} \\
  = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & \textit{(on met à jour la } 3^{\text{ème}} \textit{ matrice en la multipliant par } \frac{1}{4}\textit{)} \\
  = & \mathrm{rg}(F, G, H) = 3 &
  \end{array}$$

- Une deuxième possibilité est de démontrer que (AFA, AGA, AHA) est libre (et ainsi $\mathrm{rg}\big(AFA, AGA, AHA\big) = \mathrm{Card}\big(AFA, AGA, AHA\big) = 3$). Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot AFA + \lambda_2 \cdot AGA + \lambda_3 \cdot AHA = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ $(*)$.
  $$\begin{array}{lcl}
  \text{Or :} \quad (*) & \Leftrightarrow & \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
  & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 4\,\lambda_3 & 4\,\lambda_2 + 6\,\lambda_3 \\ 4\,\lambda_2 + 6\,\lambda_3 & 4\,\lambda_1 + 12\,\lambda_2 + 9\,\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
  & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4\lambda_1 & + & 12\lambda_2 & + & 9\lambda_3 & = & 0 \\ & & 4\lambda_2 & + & 6\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 4\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
  & \Leftrightarrow & \{\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\
  & & \textit{(par remontées successives)}
  \end{array}$$

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $\quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

On note de plus :

$$\begin{array}{rcl} E_{-4} & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = -4X\} \\ E_1 & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = X\} \\ E_{16} & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 16X\} \end{array}$$

4. a) Démontrer : $E_{-4} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$.

Démonstration.

Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_{-4} & \iff & MX = -4X \\ & \iff & (M + 4I)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 4 & 12 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & 8y & + & 6z & = & 0 \\ 4x & + & 12y & + & 13z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 4x & & + \ 4z & = & 0 \\ & 8y & + \ 6z & = & 0 \\ & 12y & + \ 9z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 4x & & + \ 4z & = & 0 \\ & 8y & + \ 6z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} 4x & = & -4z \\ 8y & = & -6z \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_{-4} & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \ \text{ et } \ y = -\frac{3}{4}z \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -\frac{3}{4}z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_{-4} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right)}$$

b) En déduire une base et la dimension de E_{-4}.

Démonstration.
La famille $\mathcal{F}_{-4} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$ est :

× génératrice de E_{-4} d'après la question précédente,

× libre, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F}_{-4} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_{-4}.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(E_{-4}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_{-4}) = 1.}$$

□

5. En procédant comme en question ***4.***, déterminer de même une base et la dimension de E_1.

Démonstration.

- Déterminons E_1.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_1 & \Longleftrightarrow & MX = X \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & (M - I)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & 3y & + & 6z & = & 0 \\ 4x & + & 12y & + & 8z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3}{\overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & & & + 4z & = 0 \\ & & y & + 2z & = 0 \\ & & 3y & + 6z & = 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & & & + 4z & = 0 \\ & & y & + 2z & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 4z \\ y & = & -2z \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 4z \text{ et } y = -2z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 4z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

- Déterminons une base de E_1.

La famille $\mathcal{F}_{-4} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

× génératrice de E_1 d'après le point précédent,

× libre, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_1.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(E_1) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_1) = 1.}$$

□

6. On note $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

Démonstration.

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 4L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & -20 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow 4L_3 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & -20 & 5 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure. De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P.

- On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow 25L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 5L_2 - L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 100 & 100 & 0 & 24 & -4 & -4 \\ 0 & -100 & 0 & -16 & 16 & -4 \\ 0 & 0 & 25 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 100 & 0 & 0 & 8 & 12 & -8 \\ 0 & -100 & 0 & -16 & 16 & -4 \\ 0 & 0 & 25 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{100} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{100} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{25} L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{100} & \frac{12}{100} & -\frac{8}{100} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{16}{100} & -\frac{16}{100} & \frac{4}{100} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{25} & \frac{4}{25} & \frac{4}{25} \end{array}\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

On remarque que les deux premières colonnes de la matrice P ne sont autres que les vecteurs des familles $\mathcal{F}_{-4}$ et $\mathcal{F}_1$. C'est ce choix qui permet d'exprimer par la suite la matrice M sous une forme plus simple. On en reparlera dans le chapitre « Réduction ».

□

7. Montrer : $M = PDP^{-1}$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$PD = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 4 & 16 \\ -12 & -2 & 32 \\ 16 & 1 & 64 \end{pmatrix}$$

Commentaire

Pour déterminer la valeur de PDP^{-1}, il est préférable de commencer par le calcul du produit PD car ces deux matrices sont données dans l'énoncé. Commencer par le calcul DP^{-1} est plus risqué car il est possible d'avoir commis une erreur dans le calcul de P^{-1}. Si l'on effectue en premier ce calcul, on gardera le coefficient $\frac{1}{25}$ en facteur :

$$DP^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -8 & -12 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \\ 16 & 64 & 64 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -16 & 4 & 16 \\ -12 & -2 & 32 \\ 16 & 1 & 64 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0 & 100 & 150 \\ 100 & 300 & 225 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } PDP^{-1} = M.}$$

Commentaire

- Ce type de questions est l'occasion de vérifier vos précédents calculs : si vous n'obtenez pas le résultat attendu c'est que vous avez certainement commis une erreur dans le calcul de P^{-1}.
- L'énoncé demande de faire le produit de 3 matrices. Le résultat attendu étant énoncé, il suffit de faire le premier produit et d'affirmer que le second donne le résultat souhaité. Évidemment, pour agir ainsi, il faut être sûr de vos calculs précédents. Sinon, le correcteur jugera que c'est une tentative d'arnaque, ce qui est peu apprécié.

□

8. Vérifier que $(D+4I)(D-I)(D-16I)$ est la matrice nulle.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$(D-I)(D-16I) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$(D+4I)(D-I)(D-16I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(D+4I)(D-I)(D-16I) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

9. En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $(D+4I)(D-I)(D-16I) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} (D+4I)(D-I)(D-16I) &= (D+4I)(D^2-17D+16I) \quad \textit{(car les matrices } D \textit{ et } I \textit{ commutent)} \\ &= D^3 - 13D^2 - 52D + 64I \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$D^3 - 13D^2 - 52D + 64I = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

$$\text{donc} \quad D^3 = 13D^2 + 52D - 64I$$

- Or, d'après la question ***7.*** : $M = PDP^{-1}$. On en déduit :

$$M^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

$$\text{de même} \quad M^3 = M^2M = (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^3P^{-1}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned} M^3 &= PD^3P^{-1} \\ &= P(13D^2 + 52D - 64I)P^{-1} \\ &= 13PD^2P^{-1} + 52PDP^{-1} - 64PP^{-1} \\ &= 13M^2 + 52M - 64I \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } M^3 = 13M^2 + 52M + 64.}$$

□

Exercice 2 (EDHEC 2010)

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod\limits_{k=0}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$u_0 \ = \ \prod_{k=0}^{0} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \ = \ 1 + \frac{1}{2^0} \ = \ 1 + \frac{1}{1} \ = \ 1 + 1 \ = \ 2$$

- Ensuite :

$$u_1 \ = \ \prod_{k=0}^{1} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \ = \ \left(1 + \frac{1}{2^0}\right)\left(1 + \frac{1}{2^1}\right) \ = \ 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) \ = \ \cancel{2}\frac{3}{\cancel{2}} \ = \ 3$$

- Enfin :

$$u_2 \ = \ \prod_{k=0}^{2} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \ = \ \left(1 + \frac{1}{2^0}\right)\left(1 + \frac{1}{2^1}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \ = \ 3\left(1 + \frac{1}{4}\right) \ = \ 3\frac{5}{4} \ = \ \frac{15}{4}$$

$$\boxed{u_0 = 2,\ u_1 = 3 \text{ et } u_2 = \frac{15}{4}.}$$

$\square$

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n \ = \ \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \ = \ \left(1 + \frac{1}{2^0}\right) \times \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \ = \ 2 \times \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $1 + \dfrac{1}{2^k} \geqslant 1$. D'où : $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right) \geqslant 1$. Ainsi :

$$u_n = 2 \times \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \ \geqslant \ 2 \times 1 = 2$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2.}$$

Commentaire

On pouvait aussi résoudre cette question grâce à une récurrence.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geqslant 2$.

- **Initialisation** : d'après l'énoncé : $u_0 = 2 \geqslant 2$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \geqslant 2$).

$$u_{n+1} \ = \ \prod_{k=0}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \ = \ \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \ = \ u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

  De plus, par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 2$. On en déduit :

$$u_{n+1} \ \geqslant \ 2 \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \ \geqslant \ 2 \times 1 = 2$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.

$\square$

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de u_{n+1} :

$$u_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) u_n}$$

- Étudions les variations de la suite (u_n).
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  D'après la question ***2.a)***, $u_n \geqslant 2$. Donc, en particulier, $u_n > 0$.

  On peut alors écrire :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cancel{u_n}}{\cancel{u_n}} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \geqslant 1$$

  On obtient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$

$$\text{donc} \quad u_{n+1} \geqslant u_n \quad (\textit{car } u_n > 0)$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

□

c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.

Démonstration.

- La fonction $h : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$.
  Sa courbe représentative $\mathcal{C}_h$ se situe donc sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= h(1) + h'(1)\,(x-1) \\ &= \ln(1) + \frac{1}{1}\,(x-1) = x - 1 \end{aligned}$$

  On en déduit :

$$\forall x \in\,]0, +\infty[, \quad \ln(x) \leqslant x - 1$$

- Soit $t \in\,]-1, +\infty[$.
  Alors : $1 + t \in\,]0, +\infty[$. On peut donc appliquer l'inégalité précédente à $x = 1 + t$. On obtient :

$$\ln(1+t) \leqslant \underbrace{(\cancel{1} + t) - \cancel{1}}_{= t}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in\,]-1, +\infty[,\ \ln(1+t) \leqslant t.}$$

Commentaire

- L'égalité de l'énoncé propose de comparer une quantité en x à un polynôme de degré 1. Il faut donc comprendre que l'on compare les positions de la courbe d'une fonction et d'une droite. Il est donc naturel de penser à une inégalité de convexité.

Commentaire

- On pouvait également démontrer cette inégalité en étudiant la fonction :
$$g : x \mapsto \ln(1+x) - x$$
  1) On justifie que g est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
  2) On détermine les variations de g sur $]-1,+\infty[$.
  On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g		$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	

  3) Comme la fonction g admet un unique maximum en 0, alors :
$$\forall x \in\,]-1,+\infty[, \quad g(x) \ \leqslant\ g(0) = 0$$
  Autrement dit : $\forall x \in\,]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) - x \leqslant 0$.

□

d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :
$$\ln(u_n) \ = \ \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$
- Soit $k \in [\![0,n]\!]$. En appliquant l'inégalité de la question ***2.c)*** à $\dfrac{1}{2^k} \in\,]-1,+\infty[$, on obtient :
$$\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \ \leqslant \ \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
- En sommant ces inégalités pour k variant de 0 à $n-1$, on obtient :
$$\ln(u_n) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \ \leqslant \ \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
  Or :
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^0 \ \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \ = \ 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$
  Et de plus : $1 - \dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant 1$. Donc : $2\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right) \leqslant 2$. Par transitivité, on obtient :
$$\ln(u_n) \ \leqslant \ 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \ \leqslant \ 2$$

$$\boxed{\text{La suite } \big(\ln(u_n)\big) \text{ est donc majorée par 2.}}$$

□

3. ***a)*** En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in \left[2, \mathrm{e}^2\right]$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} & \ln(u_n) \leqslant 2 & \\ \text{donc} & u_n \leqslant \mathrm{e}^2 & \textit{(par croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{array}$$

- Ainsi, la suite (u_n) est :
  - × croissante d'après la question ***2.b)***,
  - × majorée par e^2.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell \text{ avec : } \ell \leqslant \mathrm{e}^2.}$$

- D'après la question ***2.a)*** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$$

Par passage à la limite, on obtient : $2 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{e}^2$.

$$\boxed{\text{D'où : } \ell \in [2, \mathrm{e}^2]}$$

□

b) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$.

Démonstration.
On procède par l'absurde.
Supposons : `NON`$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell)$. Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $u_{n_0} > \ell$.

- La suite (u_n) étant croissante d'après ***2.b)***, on a, par récurrence immédiate :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0}$$

D'après la question précédente, (u_n) converge vers ℓ. Ainsi, par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus, on obtient : $\ell \geqslant u_{n_0}$.

- En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors : $\ell \geqslant u_{n_0} > \ell$.

Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell.}$$

□

4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On sait que :
  - × la suite (u_n) est convergente de limite ℓ,
  - × la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $[2, \mathrm{e}^2]$, donc en particulier est continue en $\ell \in [2, \mathrm{e}^2]$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } \big(\ln(u_n)\big) \text{ est convergente et de limite : } \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell)}$$

- Cette limite s'écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$\boxed{\text{En combinant ces résultats, on obtient : } \ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right).}$$

$\square$

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) &= \ln(\ell) - \ln(u_n) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \\
&= \left(\cancel{\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) - \cancel{\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)}$$

$\square$

c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question ***2.c)***, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On a :

$$\begin{array}{lrcll}
 & u_n & \leqslant & \ell & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.b)}}\textit{)} \\
\text{donc} & 1 & \leqslant & \dfrac{\ell}{u_n} & \textit{(car d'après la question } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{, } u_n \geqslant 2 > 0\textit{)} \\
\text{donc} & 0 & \leqslant & \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) & \textit{(par croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \geqslant 0}$$

Commentaire

Il était aussi possible d'utiliser la question précédente. Détaillons ce point.

- Pour tout $k \in [\![n+1, +\infty[\![$: $\frac{1}{2^k} \geqslant 0$. Donc : $\frac{1}{2^k} + 1 \geqslant 1$. Et ainsi : $\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \geqslant 0$.
- Or, d'après la question précédente : $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

  La quantité $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right)$ est donc positive car est la somme (infinie) de termes positifs.

- Par ailleurs, on a démontré en ***2.d)*** que pour tout $k \in [\![n+1, +\infty[\![$: $\ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^k}$.

  On en déduit :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$
  Or :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$
  On en déduit :
$$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}.}$$
□

d) Déduire de la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente :

	0	$\leqslant$	$\ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right)$	$\leqslant$	$\dfrac{1}{2^n}$	
donc	$1 = e^0$	$\leqslant$	$\dfrac{\ell}{u_n}$	$\leqslant$	$e^{\frac{1}{2^n}}$	*(car $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$)*
et	1	$\geqslant$	$\dfrac{u_n}{\ell}$	$\geqslant$	$e^{-\frac{1}{2^n}}$	*(car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$)*
ainsi	ℓ	$\geqslant$	u_n	$\geqslant$	$\ell\, e^{-\frac{1}{2^n}}$	*(car $\ell \geqslant 0$)*
d'où	$-\ell$	$\leqslant$	$-u_n$	$\leqslant$	$-\ell\, e^{-\frac{1}{2^n}}$	
enfin	0	$\leqslant$	$\ell - u_n$	$\leqslant$	$\ell - \ell\, e^{-\frac{1}{2^n}} = \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$	

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)}$$
□

e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Démonstration.

- La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se situe donc au dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{array}{rcl} y & = & f(0) + f'(0)\,(x-0) \\ & = & \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0\, x \ = \ 1 + x \end{array}$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \ \geqslant \ 1 + x$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$.
Alors : $-t \in \mathbb{R}$. On peut donc appliquer l'inégalité précédente à $x = -t$. On obtient :

$$\mathrm{e}^{-t} \ \geqslant \ 1 - t$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in \mathbb{R},\ 1 - \mathrm{e}^{-t} \leqslant t.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
On applique l'inégalité précédente à $x = \dfrac{1}{2^n} \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}} \ \leqslant \ \frac{1}{2^n}$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\ell - u_n \ \leqslant \ \ell \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right) \ \leqslant \ \ell\ \frac{1}{2^n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}}$$

- Finalement, on sait :
  × $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2^n}$,
  × la série $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in \left]-1, 1\right[$. Elle est donc convergente.
  Il en est de même de la série $\sum \dfrac{\ell}{2^n}$.
  (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $\ell \neq 0$).

$$\boxed{\text{Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série } \sum (\ell - u_n) \text{ est convergente.}}$$

□

5. Écrire en **Scilab** une fonction `SuiteU` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie le terme $u_{\texttt{n}}$.

Démonstration.
On propose la fonction suivante :

```
1 function u = SuiteU(n)
2     u = 1
3     for k = 0:n
4         u = u ⋆ (1 + 1/(2^k))
5     end
6 endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  L'énoncé commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `SuiteU`,
  × elle prend en paramètre d'entrée l'entier `n`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `u`.

```
1 function u = SuiteU(n)
```

La variable `u`, qui contiendra la valeur de $u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$, est initialisée à 1 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder un produit puisque 1 est l'élément neutre de l'opérateur de multiplication).

```
2     u = 1
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 5 consistent à calculer les valeurs successives de u_n. Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for) :

```
3     for k = 0:n
4         u = u ⋆ (1 + 1/(2^k))
5     end
```

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `u` contient le produit $\prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$, ce que l'on souhaitait.

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un programme **Scilab** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
- On pouvait aussi proposer le script suivant qui utilise des fonctions prédéfinies de **Scilab**.

```
1 function u = SuiteU(n)
2     N = 0:n
3     U = 1 + 1./(2.^N)
4     u = prod(U)
5 endfunction
```

□

6. a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\ell - u_n| \leqslant \dfrac{e^2}{2^n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord que d'après la question ***4.e)*** : $\ell - u_n \geqslant 0$.
  Ainsi : $|\ell - u_n| = \ell - u_n$.
- D'après la question ***3.*** : $\ell \leqslant e^2$. Ainsi, toujours d'après la question ***4.e)*** :
$$0 \ \leqslant \ \ell - u_n \ \leqslant \ \frac{\ell}{2^n} \ \leqslant \ \frac{e^2}{2^n}$$
- De plus, par transitivité :
$$-\frac{e^2}{2^n} \ \leqslant \ 0 \ \leqslant \ \ell - u_n$$
  D'où :
$$-\frac{e^2}{2^n} \ \leqslant \ \ell - u_n \ \leqslant \ \frac{e^2}{2^n}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ |\ell - u_n| \leqslant \frac{e^2}{2^n}.}$$

□

b) Déterminer un entier N tel que : $\forall n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.

Démonstration.

- Il suffit de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\frac{e^2}{2^n} \ \leqslant \ 10^{-3}$$
  Si c'est le cas, on obtient par transitivité :
$$|\ell - u_n| \ \leqslant \ \frac{e^2}{2^n} \ \leqslant \ 10^{-3}$$
- Déterminons alors un entier N vérifiant $\dfrac{e^2}{2^n} \ \leqslant \ 10^{-3}$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{e^2}{2^n} \leqslant 10^{-3} & \Leftrightarrow & \dfrac{2^n}{e^2} \geqslant 10^3 & \textit{(par stricte décroissante de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & 2^n \geqslant 10^3\ e^2 & \textit{(car } e^2 > 0\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & n\ln(2) \geqslant \ln(10^3) + \ln(e^2) & \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & n\ln(2) \geqslant 3\ln(10) + 2 & \\
& \Leftrightarrow & n \geqslant \dfrac{3\ln(10)+2}{\ln(2)} & \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{En choisissant } N = \left\lceil \frac{3\ln(10)+2}{\ln(2)} \right\rceil \text{ (ou tout entier supérieur), on obtient : } |u_N - \ell| \leqslant 10^{-3}.}$$

□

c) Déduire de cet encadrement un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près. *On pourra utiliser la fonction* `SuiteU`.

Démonstration.

- Afin de calculer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près, il suffit de trouver N tel que :

$$|u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$$

  Un tel enter N a été déterminé en question précédente.

- On propose alors le programme suivant.

```
1 N = ceil((2 + 3 * log(10)) / log(2))
2 u = SuiteU(N)
3 disp(u)
```

  Détaillons les éléments de ce script.

  × **Début du programme**
  On commence par stocker dans une variable `N` la valeur déterminée en question précédente.

```
1 N = ceil((2 + 3 * log(10)) / log(2))
```

  × **Utilisation de `SuiteU`**
  On souhaite ensuite calculer le réel u_N et le stocker dans la variable `u`. D'après la question ***5.***, c'est la fonction `SuiteU` qui le permet.

```
2 u = SuiteU(N)
```

  × **Fin du programme**
  Après l'exécution de la ligne 2, la variable `u` contient la valeur u_N, qui est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près. On finit donc ce programme en affichant la valeur de cette variable.

```
3 disp(u)
```

□

Exercice 3 (EML 2000)

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (le roi de carreau et le roi de cœur), et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Partie I : Premier protocole

Les $2n$ cartes du jeu sont alignées, face cachée, sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, \dots, 2n-1\}$, $\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{2n-k}{n\,(2n-1)}$.

Démonstration.

- Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des cartes du jeu. On a : $\mathrm{Card}\,(\mathcal{C}) = 2n$.
  L'univers Ω est l'ensemble des $2n$-uplets d'éléments distincts de $\mathcal{C}$. Ainsi : $\mathrm{Card}(\Omega) = (2n)!$.
  Dans la suite, on tel $2n$-uplet sera nommé $2n$-tirage.

Commentaire

- L'ensemble $\mathcal{C}$ est un ensemble fini de cardinal $2n$. Cela revient à dire qu'il existe une bijection entre l'ensemble $\mathcal{C}$ et l'ensemble $[\![1, 2n]\!]$. Il est d'ailleurs possible de considérer directement $\mathcal{C} = [\![1, 2n]\!]$. Si on fait ce choix, l'ensemble Ω est constitué des $2n$-uplets d'éléments distincts de $[\![1, 2n]\!]$. Pour ce type d'uplets, on parle aussi de $2n$-arrangement de l'ensemble $[\![1, 2n]\!]$ ou encore de $2n$-permutation de l'ensemble $[\![1, 2n]\!]$. Rappelons au passage qu'une permutation d'un ensemble n'est autre qu'une bijection de cet ensemble. Une bijection φ de $[\![1, 2n]\!]$ peut être représentée par un $2n$-uplet d'éléments distincts de $[\![1, 2n]\!]$. Si la $i^{\text{ème}}$ case du $2n$-uplet contient la valeur $j \in [\![1, 2n]\!]$ c'est que $\varphi(i) = j$.
  Par exemple, la permutation $\varphi : [\![1, 4]\!] \to [\![1, 4]\!]$ définie par :
  $$\varphi(1) = 4,\ \varphi(2) = 1,\ \varphi(3) = 3,\ \varphi(4) = 2$$
  peut être représentée par le 4-uplet :
  $$(4, 1, 3, 2)$$
- Insistons sur le fait qu'il n'existe pas de définition canonique de l'univers Ω. Le choix pour Ω influe forcément dans la présentation et la rédaction mais il n'influe évidemment pas pour le résultat des calculs de probabilités.
- On a introduit dans cette question la notion de $2n$-tirage. Cela permet de faire la distinction entre un résultat de l'expérience (le tirage de $2n$ cartes) et le tirage d'une carte à l'étape $i \in [\![1, 2n]\!]$. C'est finalement la même différence qu'il y a entre une permutation φ et une valeur $\varphi(i)$.

- Soit $k \in [\![1, 2n-1]\!]$.
  L'événement $[X = k]$ est réalisé par tous les $2n$-tirages dont les $k-1$ premiers éléments ne sont pas des rois rouges et dont le $k^{\text{ème}}$ élément est un roi rouge.

  Un tel $2n$-tirage est entièrement déterminé par :

  – la carte en première position : $2n-2$ possibilités *(c'est une des $2n-2$ cartes qui ne sont pas des rois rouges)*

  – la carte en deuxième position : $2n-3$ possibilités *(c'est une des $2n-3$ cartes restantes qui ne sont pas des rois rouges)*

  – ...

  – la carte en $(k-1)^{\text{ème}}$ position : $2n - \big((k-1)+1\big)$ possibilités *(c'est une des $2n-k$ cartes restantes qui ne sont pas des rois rouges)*

  – la carte en $k^{\text{ème}}$ position : 2 possibilités *(c'est l'un des deux rois rouges)*

  – la carte en $(k+1)^{\text{ème}}$ position : $2n-k$ possibilités *(c'est une des $2n-k$ cartes restantes, autre roi rouge compris)*

  – ...

  – la carte en $(2n)^{\text{ème}}$ position : $2n-(2n-1)$ possibilité *(c'est la seule carte qui reste)*

  Il y a donc $2n \times (2n-1) \times \cdots \times (2n-k) \times 2 \times (2n-k) \times \ldots \times 1$ tels $2n$-tirages.

  Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X=k]\big) &= \frac{\text{Card}\big([X=k]\big)}{\text{Card}(\Omega)} \\
&= \frac{(2n-2)\dots(2n-k+1)\,(2n-k)\ 2\ (2n-k)\dots 1}{(2n)\,!} \\
&= \frac{\cancel{(2n-2)}\dots\cancel{(2n-k+1)}(2n-k)\ 2\ \cancel{(2n-k)}\dots\cancel{1}}{2n\ (2n-1)\cancel{(2n-2)}\dots\cancel{(2n-k+1)}\ \cancel{(2n-k)}\dots\cancel{1}} \\
&= \frac{(2n-k)\cancel{2}}{\cancel{2}n(2n-1)} \\
&= \frac{2n-k}{2n(2n-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, 2n-1]\!],\ \mathbb{P}([X=k]) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}}$$

Commentaire

Il était aussi possible d'utiliser la formule des probabilités composées.
Pour ce faire, il faut prendre l'initiative d'introduire des événements.

- Pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$, notons R_i l'événement R_i : « on a tiré un roi rouge lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».
  Ainsi $\overline{R_i}$: « on a tiré une carte autre qu'un roi rouge lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».
  On a alors :
$$[X=k] \ = \ \overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}} \cap R_k$$

Commentaire

- On en déduit, par la formule des probabilités composées, et sous réserve de l'existence des probabilités conditionnelles entrant en jeu :
$$\mathbb{P}([X=k]) \;=\; \mathbb{P}(\overline{R_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \times \ldots \times \mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-2}}}(\overline{R_{k-1}}) \times \mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}}}(R_k)$$
- Or, pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$: $\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{j-1}}}(\overline{R_j}) = \dfrac{2n-2-(j-1)}{2n-(j-1)} = \dfrac{2n-1-j}{2n+1-j}$.
En effet, avant la découverte de la $j^{\text{ème}}$ carte, on a tiré $j-1$ cartes (aucun roi rouge) et il reste donc $2n-(j-1)$ cartes dans le paquet dont $2n-2-(j-1)$ qui ne sont pas des rois rouges.
- Et $\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}}}(R_k) = \dfrac{2}{2n-(k-1)} = \dfrac{2}{2n+1-k}$.
En effet, avant la découverte de la $k^{\text{ème}}$ carte, on a tiré $k-1$ cartes et il reste donc $2n-(k-1)$ cartes dans le paquet dont 2 qui sont des rois rouges.
- On en déduit :
$$\mathbb{P}([X=k]) \;=\; \frac{\cancel{2n-2}}{2n}\ \frac{\cancel{2n-3}}{2n-1}\ \frac{\cancel{2n-4}}{\cancel{2n-2}} \cdots \frac{\cancel{2n+1-k}}{\cancel{2n+3-k}}\ \frac{2n-k}{\cancel{2n+2-k}}\ \frac{2}{\cancel{2n+1-k}}$$ $\square$

2. a) Démontrer : $\forall m \geqslant 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m\,(m+1)\,(2m+1)}{6}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(m)$ où $\mathcal{P}(m)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m\,(m+1)\,(2m+1)}{6}$.

▸ **Initialisation** :
- D'une part : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$.
- D'autre part : $\dfrac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = \dfrac{2 \times 3}{6} = 1$

D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $m \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(m)$ et démontrons $\mathcal{P}(m+1)$ $\left(\textit{i.e.}\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)\,(m+2)\,\big(2\,(m+1)+1\big)}{6} \right)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2 \\
&= \frac{m\,(m+1)\,(2m+1)}{6} + (m+1)^2 && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= (m+1) \left(\frac{m\,(2m+1)}{6} + m + 1 \right) \\
&= (m+1)\ \frac{m\,(2m+1) + 6\,(m+1)}{6} \\
&= (m+1)\ \frac{2m^2 + 7m + 6}{6}
\end{aligned}$$

Or :

$$(m+2)\big(2(m+1)+1\big) \; = \; (m+2)(2m+3) \; = \; 2m^2+7m+6$$

Ainsi : $\sum\limits_{k=1}^{m+1} k^2 \; = \; (m+1)\,\dfrac{(m+2)\big(2(m+1)+1\big)}{6}$.

D'où $\mathcal{P}(m+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall m \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{m} \; = \dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}.}$$

□

b) Démontrer : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.

Démonstration.

- Remarquons : $X(\Omega) \subset [\![1, 2n-1]\!]$. En effet :
  - × on peut obtenir un roi rouge dès la première carte,
  - × comme le jeu contient 2 rois rouges et $2n$ cartes, on obtient le premier roi rouge au plus tard au $(2n-1)^{\text{ème}}$ tirage,
  - × on peut tirer le premier roi rouge dans chaque tirage intermédiaire.

$$\boxed{\text{Ainsi } X \text{ est une variable aléatoire finie. Elle admet donc une espérance.}}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{2n-1} k \; \mathbb{P}([X=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{2n-1} k \; \frac{2n-k}{n(2n-1)} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} k(2n-k) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} (2nk-k^2) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \left(2n \sum_{k=1}^{2n-1} k - \sum_{k=1}^{2n-1} k^2\right) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \left(2n \; \frac{(2n-1)(2n)}{2} - \frac{(2n-1)(2n)(2\;(2n-1)+1)}{6}\right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{(2n-1)(2n)}{n(2n-1)} \left(2n \; \frac{1}{2} - \frac{(2\;(2n-1)+1)}{6}\right) \\
&= 2\left(2n \; \frac{1}{2} - \frac{4n-1}{6}\right) \; = \; \frac{2}{6}\,(6n-(4n-1)) \\
&= \frac{2n+1}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{2n+1}{3}}$$

Commentaire

- Profitons de cette question pour faire un point sur la notation $X(\Omega)$.
Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{array}$$

Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît.

- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \ \subseteq \ ]-\infty, +\infty[$.
En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire.
- Dans le cas des v.a.r. **discrètes**, il est d'usage relativement courant de confondre :
  × l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),
  × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}([X = x]) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\mathrm{Supp}(X)$.
- Si X est une v.a.r. **discrète**, il est à noter que toute valeur prise par X avec probabilité non nulle est une valeur prise par X. Autrement dit, on a toujours :

$$\boxed{\mathrm{Supp}(X) \subseteq X(\Omega)}$$

En effet, si $x \in \mathrm{Supp}(X)$ alors $\mathbb{P}([X = x]) \neq 0$. On en déduit : $[X = x] \neq \varnothing$. Il existe donc (au moins) un élément $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = x$. La v.a.r. X prend donc la valeur x.

- La réciproque n'est pas forcément vérifiée : $X(\Omega) \cancel{\subseteq} \mathrm{Supp}(X)$.
Autrement dit, une v.a.r. X peut prendre une valeur avec probabilité nulle. On peut par exemple penser à l'expérience consistant au lancer d'un dé à 6 faces. La v.a.r. X qui donne le résultat du dé a pour ensemble image $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$. Si on considère que le dé est truqué et ne renvoie que 6, alors le support de X est $\mathrm{Supp}(X) = \{6\}$.

□

3. Les $2n$ cartes étant alignées face cachée devant le joueur, on considère le jeu d'argent régi par les règles suivantes :

- les cartes sont découvertes de gauche à droite,
- chaque découverte de carte coûte un euro,
- le jeu s'arrête lorsque le premier roi rouge est découvert.
  La partie est alors considérée comme gagnée et on verse a euros au joueur.
  (la découverte de cette carte, comme les précédentes, coûte 1 *euro au joueur)*

On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte, G_1 prend la valeur $a - k$.

a) Exprimer G_1 en fonction de a et X.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$.
Comme la famille $\big([X = k] \big)_{k \in [\![1,2n-1]\!]}$ est un système complet d'événements, on a :

$$\Omega \ = \ \bigcup_{k=1}^{2n-1} \ [X = k]$$

Comme $\omega \in \Omega$, on en déduit qu'il existe $k \in [\![1, 2n - 1]\!]$ tel que : $\omega \in [X = k]$.
Ainsi : $X(\omega) = k$. Autrement dit, lors de ce $2n$-tirage ω, le premier roi rouge est apparu en $k^{\text{ème}}$ position. D'après les règles établies dans l'énoncé :

× la découverte de chacune des k premières cartes a coûté 1 euro au joueur,

× la découverte de la $k^{\text{ème}}$ carte a rapporté a euros au joueur.

On en déduit :

$$G_1(\omega) = a - k = a - X(\omega)$$

Finalement, on a démontré : $\forall \omega \in \Omega$, $G_1(\omega) = a - X(\omega)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } G_1 = a - X.}$$

□

b) En déduire l'espérance de la variable aléatoire G_1.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $G_1 = a - X$.
- Ainsi, la v.a.r. G_1 admet une espérance en tant que transformée affine de la v.a.r. X qui en admet une.
  De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(G_1) \ = \ \mathbb{E}(a - X) \ = \ a - \mathbb{E}(X) \ = \ a - \frac{2n+1}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(G_1) = a - \frac{2n+1}{3}}$$

Commentaire

Si on ne repère pas la relation $G_1 = a - X$ en question précédente, on peut toujours résoudre cette question en déterminant la loi de G_1.

- Déterminons la loi de G_1.
  - × Tout d'abord : $G_1(\Omega) = \{a - k \mid k \in [\![1, 2n-1]\!]\}$ puisque le premier rouge peut être découvert entre le 1^{er} et le $(2n-1)^{\text{ème}}$ tirage.
  - × Soit $k \in [\![1, 2n-1]\!]$.
    Comme : $[G_1 = a - k] = [X = k]$, on a, d'après la question ***1.*** :
    $$\mathbb{P}([G_1 = a-k]) = \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$$
- La v.a.r. G_1 est donc finie. On en déduit qu'elle admet une espérance.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(G_1) & = & \sum\limits_{k=1}^{2n-1} (a-k)\ \mathbb{P}([G_1 = a-k]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{2n-1} (a-k)\ \mathbb{P}([X = k]) & \textit{(car } [G_1 = a-k] = [X=k]\textit{)} \\
& = & a \sum\limits_{k=1}^{2n-1} \mathbb{P}([X=k]) - \sum\limits_{k=1}^{2n-1} k\ \mathbb{P}([X=k]) & \\
& = & a - \mathbb{E}(X) & \textit{(car } ([X=k])_{k \in [\![1,2n-1]\!]} \textit{ est un SCE)}
\end{array}$$

□

Partie II : Deuxième protocole

On reprend le protocole précédent en ajoutant la règle suivante :

– le joueur découvre au maximum n cartes.

Ainsi, contrairement au protocole précédente, la victoire du joueur n'est plus assurée. On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Par exemple, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 prend la valeur $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 prend la valeur $-n$.

4. Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer $\mathbb{P}([G_2 = a-k])$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Par définition de la v.a.r. S_2, on a : $[G_2 = a-k] = [X = k]$. On en déduit :

$$\mathbb{P}([G_2 = a-k]) \ = \ \mathbb{P}([X=k]) \ = \ \frac{2n-k}{n(2n-1)}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}([G_2 = a-k]) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}}$$

□

5. Vérifier : $\mathbb{P}([G_2 = -n]) = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.

Démonstration.

- On remarque : $G_2(\Omega) \subset \{a - k \ / \ k \in [\![1, n]\!]\} \cup \{-n\}$.
  En effet, le 1^{er} roi rouge peut être tiré entre le 1^{er} et le $n^{\text{ème}}$ tirage, ou ne jamais être tiré (et dans ce dernier cas, la v.a.r. G_2 prend la valeur $-n$).
- La famille $([G_2 = a-1], [G_2 = a-2], \dots, [G_2 = a-n], [G_2 = -n])$ forme donc un système complet d'événements.
  On en déduit : $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([G_2 = a-k]) + \mathbb{P}([G_2 = -n]) = 1$. Ou encore :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([G_2 = -n]) &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([G_2 = a-k]) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2n-k}{n(2n-1)} \\
&= 1 - \frac{1}{n(2n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} (2n-k) \right) \\
&= 1 - \frac{1}{n(2n-1)} \left(2n \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} k \right) \\
&= 1 - \frac{1}{n(2n-1)} \left(2n\ n - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= 1 - \frac{n}{2n(2n-1)} (4n - (n+1)) \\
&= 1 - \frac{1}{2(2n-1)} (3n-1) \\
&= \frac{(4n-2) - (3n-1)}{2(2n-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([G_2 = -n]\big) = \frac{n-1}{2(2n-1)}}$$

□

6. Montrer : $\mathbb{E}(G_2) = \dfrac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)}$.

Démonstration.

- La v.a.r. G_2 est une v.a.r. finie. Elle admet donc une espérance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G_2) &= \sum_{k=1}^{n} (a-k)\ \mathbb{P}([G_2 = a-k]) + (-n)\ \mathbb{P}([G_2 = -n]) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} (a-k) \frac{2n-k}{n(2n-1)} \right) - n \frac{n-1}{2(2n-1)} && \textit{(d'après 4. et 5.)} \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} (a-k)(2n-k) \right) - n \frac{n-1}{2(2n-1)}
\end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (a-k)(2n-k) &= \sum_{k=1}^{n} (2an - (a+2n)k + k^2) \\
&= 2an \sum_{k=1}^{n} 1 - (a+2n) \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= 2an\ n - (a+2n)\ \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \textit{(d'après \textbf{2.a)})} \\
&= 2an^2 + \frac{n(n+1)}{6} \left(-3\ (a+2n) + (2n+1)\right) \\
&= 2an^2 + \frac{n(n+1)}{6} \left(-3a - 4n + 1\right) \\
&= \frac{n}{6} \left(12an + (n+1)(-3a-4n+1)\right) \\
&= \frac{n}{6} \big(12an - 3an - 4n^2 + n - 3a - 4n + 1\big) \\
&= \frac{n}{6} \big(9an - 3a - 3n + 1 - 4n^2\big) \\
&= \frac{n}{6} \big(3a\ (3n-1) + 1 - 3n - 4n^2\big)
\end{aligned}$$

- En combinant ces résultats, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G_2) &= \frac{1}{n(2n-1)} \Big(\frac{n}{6} \big(3a\ (3n-1) + 1 - 3n - 4n^2\big)\Big) - n\frac{n-1}{2(2n-1)} \\
&= \frac{n}{6n(2n-1)} \big(\big(3a\ (3n-1) + 1 - 3n - 4n^2\big) - 3n(n-1)\big) \\
&= \frac{1}{6(2n-1)} \big(3a\ (3n-1) + 1 - 7n^2\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(G_2) = \frac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)}}$$

□

Partie III : Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$).

7. Déterminer, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

Démonstration.
On cherche à déterminer le protocole donnant l'espérance de gain la plus élevée.
On cherche donc à comparer $\mathbb{E}(G_1)$ et $E(G_2)$.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(G_1) \leqslant \mathbb{E}(G_2) \\
\Leftrightarrow \quad & a - \frac{2n+1}{3} \leqslant \frac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)} \\
\Leftrightarrow \quad & 6(2n-1)a - 2(2n-1)(2n+1) \leqslant 3(3n-1)a - (7n^2-1) \quad \textit{(car } 6(2n-1) > 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow \quad & (12n - 6 - 9n + 3)a \leqslant 8n^2 - 2 - 7n^2 + 1 \\
\Leftrightarrow \quad & (3n-3)a \leqslant n^2 - 1 \\
\Leftrightarrow \quad & a \leqslant \frac{(n+1)\cancel{(n-1)}}{3\cancel{(n-1)}} \quad \textit{(car } n = 16, \textit{ donc } n - 1 > 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow \quad & a \leqslant \frac{n+1}{3} = \frac{17}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } a > \frac{17}{3}, \text{ le protocole 1 est le plus favorable au joueur.} \\ \text{Si } a < \frac{17}{3}, \text{ le protocole 2 est le plus favorable au joueur.} \\ \text{Si } a = \frac{17}{3}, \text{ les deux se valent.} \end{array}}$$

□

I. Problème (EDHEC 2005)

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Commentaire

- Dans un énoncé de probabilités discrètes, on manipule différents niveaux d'objets.
  1) Au premier niveau, on trouve l'expérience aléatoire considérée.
  On note Ω l'univers des possibles : c'est **l'ensemble** des résultats possibles (appelés aussi issues) de l'expérience. Ici, Ω est l'ensemble de tous les ∞-déplacements possibles du mobile. Par exemple, $\omega = (0, 1, 2, 0, 1, 0, \ldots)$ (évidemment, on ne peut décrire l'∞-tirage en entier !) est un ∞-déplacement qui est un résultat possible de l'expérience. Ce résultat est obtenu si le mobile se déplace à droite aux instants 1 et 2, puis revient en 0 à l'instant 3, puis se déplace de nouveau à droite à l'instant 4 puis revient de nouveau en 0 à l'instant 5 ...
  Décrire précisément Ω n'est pas si simple ici. On peut toutefois dire que Ω est un sous-ensemble de l'ensemble des suites à valeurs entières positives.

  2) Au deuxième niveau, on trouve les événements : un événement A n'est rien d'autre qu'un **ensemble** qui regroupe certaines issues de l'expérience. Ainsi : $A \subset \Omega$. Par exemple, l'événement A : « le mobile se déplace à droite à l'instant 1 » regroupe tous les ∞-déplacements dont le coefficient en position 1 vaut 1. Par exemple, $\omega = (0, 1, 2, 0, 1, 0 \ldots) \in A$.
  Lorsque $\omega \in A$, on dit que ω **réalise** l'événement A.

  3) Au troisième niveau, on trouve les v.a.r. . Ce sont des **applications** particulières :
  - elles prennent comme argument un résultat possible de l'expérience et renvoient une valeur réelle. Par exemple, avec l'∞-déplacement ω précédent : $T(\omega) = T\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \ldots)\big) = 3$.
    En effet, d'après l'énoncé, T prend la valeur du premier instant de retour à l'origine du mobile.
    Par ailleurs :
    $\times$ $X_1\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \ldots)\big) = 1$, $\times$ $X_3\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \ldots)\big) = 0$, $\times$ $X_5\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \ldots)\big) = 0$,
    $\times$ $X_2\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \ldots)\big) = 2$, $\times$ $X_4\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \ldots)\big) = 1$, $\times$ ...
  - elles sont des machines à créer des événements. Par exemple, $[T = 2]$ est un événement.
    Il regroupe **tous** les ∞-déplacements ω tels que : $T(\omega) = 2$.
    Autrement dit : $[T = 2] = \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) = 2\} \subset \Omega$.

  Ce deuxième point nous replonge au deuxième niveau. Ainsi, pour comprendre le chapitre sur les v.a.r. , il est essentiel de maîtriser celui sur les probabilités générales.
- Les notations $T = 1$ et $T = 4$ de l'énoncé sont malvenues. Écrire $T = 4$ signigie que T est la v.a.r. constante égale à 4. Il n'en est rien. Il faut alors traduire rigoureusement l'énoncé : si $\omega = (0, 1, 2, 3, 0, 0, 1, \ldots)$ alors $T(\omega) = 4$. On peut aussi dire que si les abscisses de déplacement du mobile sont 0, 1, 2, 3, 0, 0, 1 alors la v.a.r. T **prend la valeur** 4.
  Mais en aucun cas, il ne faut écrire $T = 4$ car cela marque une confusion d'objets.
  Sur ce point remarquons que l'écriture : $X_0 = 0$ de l'énoncé est juste. En effet, le mobile se situe toujours à l'origine à l'instant 0. Ainsi, la v.a.r. est constante égale à 0.

1. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- L'événement $[T = k]$ est réalisé si et seulement si le mobile revient en 0 pour la première fois à l'instant k. Cela signifie qu'entre l'instant 0 et l'instant $k - 1$, le mobile n'est pas revenu en 0 et que ce retour a eu lieu à l'instant k.
Étant données les règles de déplacement du mobile, l'événement $[T = k]$ est réalisé si et seulement si le mobile s'est déplacé sur la droite lors des $k - 1$ premiers instants puis est revenu en 0 à l'instant k. Finalement, cet événement est réalisé si et seulement si :
  - × le mobile se trouve en position 1 à l'instant 1.
  - × le mobile se trouve en position 2 à l'instant 2.
  - × ...
  - × le mobile se trouve en position $k - 1$ à l'instant $k - 1$.
  - × le mobile se trouve en position 0 à l'instant k.

$$\boxed{\text{On en déduit : } [T = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = i]\right) \cap [X_k = 0].}$$

- Afin de lever toute ambiguïté, précisons cette formule lorsque $k = 1$.

$$\boxed{[T = 1] = [X_1 = 0]}$$

(le mobile revient à la position 0 *dès l'instant* 1*)* □

b) Donner la loi de X_1.

Démonstration.

- Après l'instant 0 :
  - × soit le mobile a avancé d'une position et se trouve donc en position 1.
  - × soit le mobile est resté sur le point origine.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X_1(\Omega) = \{0, 1\}.}$$

- D'après l'énoncé, on a de plus :

$$\mathbb{P}([X_1 = 0]) = 1 - p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_1 = 1]) = p$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p).}$$

□

c) En déduire $\mathbb{P}([T=k])$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***1.a)*** :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([T=k]\big) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = i]\right) \cap [X_k = 0]\right)\\ &= \mathbb{P}\big([X_1=1] \cap \ldots \cap [X_{k-1} = k-1] \cap [X_k = 0]\big)\end{aligned}$$

- On en déduit, par la formule des probabilités composées, et sous réserve de l'existence des probabilités conditionnelles entrant en jeu :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\big([T=k]\big)\\ =\ &\mathbb{P}([X_1=1]) \times \ldots \times \mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-2}=k-2]}([X_{k-1}=k-1]) \times \mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-1}=k-1]}([X_k=0])\end{aligned}$$

- La position du mobile à un instant $j \geqslant 2$ ne dépendant que de sa position à l'instant précédent, on obtient :

$$\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{j-1}=j-1]}([X_j=j]) \ = \ \mathbb{P}_{[X_{j-1}=j-1]}([X_j=j]) = p$$

et :

$$\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-1}=k-1]}([X_k=0]) \ = \ \mathbb{P}_{[X_{k-1}=k-1]}([X_k=0]) = 1-p$$

ce qui permet de lever la réserve précédente.

- On en conclut :

$$\boxed{\mathbb{P}([T=k]) = p \times \ldots \times p \times (1-p) = p^{k-1}\ (1-p)}$$

- Remarquons alors : $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
(le mobile peut revenir, pour la première fois en position 0 à n'importe quel instant)
On peut donc en conclure, grâce au calcul de probabilité précédent :

$$\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)}$$

□

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

- **Initialisation** :
D'après l'énoncé, $X_0 = 0$. Ainsi : $X_0(\Omega) = \{0\} = [\![0, 0]\!]$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$).
D'après l'hypothèse de récurrence, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Autrement dit, le mobile peut se trouver à n'importe quelle position $k \in [\![0, n]\!]$ à l'instant n.
Concernant la position du mobile à l'instant $n+1$, deux cas se présentent :
  × soit le mobile se déplace en avant et ainsi le mobile se retrouve en position $k+1 \in [\![1, n+1]\!]$.
  × soit le mobile revient en position 0.

  Toutes les positions dans $[\![0, n+1]\!]$ peuvent donc bien être atteintes.
Ainsi : $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ X_n(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

Commentaire

- L'énoncé demande ici de démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, **l'égalité** : $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Il s'agit donc de démontrer une double inclusion.
  - $\times$ $X_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$. Cette inclusion est souvent la plus simple à démontrer. Elle est même généralement la seule nécessaire à la poursuite de l'exercice.
    Ici, comme le mobile ne peut prendre une position (strictement) à gauche de 0 et peut atteindre au plus le point d'abscisse n en n étapes (en ne se déplaçant que sur la droite), on obtient directement l'inclusion voulue.
  - $\times$ $[\![0, n]\!] \subset X_n(\Omega)$. Il s'agit ici de démontrer que chacune des positions 0, 1, ..., n peut être atteinte par le mobile en n étapes. Cette inclusion se démontre le plus souvent en exhibant des déplacements du possibles du mobile. Détaillons ce procédé ici.

    Soit $k \in [\![0, n]\!]$. L'∞-déplacement ω_k suivant réalise l'événement $[X_n = k]$:

    $$\omega_k \;=\; (\underbrace{0,\, 0,\, \ldots,\, 0}_{n-k},\, 1,\, 2,\, \ldots,\, k, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

    Ainsi : $\omega_k \in [X_n = k]$, c'est-à-dire : $X_n(\omega_k) = k$. D'où : $k \in X_n(\Omega)$.

  Dans la démonstration par récurrence proposée, on ne détaille pas si précisément la double-inclusion, mais la récurrence nous assure bien que chacune des positions souhaitées (de 0 à $n+1$ cette fois) sont bien atteintes.
- Remarquons enfin que pour la suite de l'exercice, démontrer l'inclusion : $X_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ est suffisante. C'est d'ailleurs sans doute ce que l'énoncé avait en tête en posant cette question. $\square$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'évènements $\Big([X_{n-1} = k] \Big)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer : $\mathbb{P}\left([X_n = 0]\right) = 1 - p$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La famille $\Big([X_{n-1} = k] \Big)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X_n = 0]) & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\left([X_{n-1} = k] \cap [X_n = 0]\right) & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \times \mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}\left([X_n = 0]\right) & \textit{(car : } \forall k \in [\![0, n-1]\!], \\
& & & \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \times (1-p) & \\
& = & (1-p) \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) & \\
& = & (1-p) &
\end{array}$$

En effet, comme $\big([X_{n-1} = k] \big)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une système complet d'événements :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) = 1$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p.}$$

$\square$

3. a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \ldots n+1\}\ ,\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\, \mathbb{P}([X_n = k-1])$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.

- La famille $\Big([X_n = i] \Big)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\big([X_{n+1} = k] \big) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\big([X_n = i] \cap [X_{n+1} = k] \big)$$

- Démontrons alors : $\forall i \neq k-1,\ [X_n = i] \cap [X_{n+1} = k] = \varnothing$.
  Soit $i \in [\![0, n]\!]$. L'événement $[X_n = i] \cap [X_{n+1} = k]$ est réalisé si et seulement si le mobile se trouve en position i à l'instant n et en position $k \neq 0$ à l'instant suivant $n+1$. Le mobile se déplaçant d'un pas sur la droite à chaque étape, cet événement ne peut être réalisé que si $i = k-1$.

$$\boxed{\forall i \neq k-1,\ [X_n = i] \cap [X_{n+1} = k] = \varnothing}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_{n+1} = k] \big) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\big([X_n = i] \cap [X_{n+1} = k] \big) \\
&= \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k-1}}^{n} \cancel{\mathbb{P}\big([X_n = i] \cap [X_{n+1} = k] \big)} \right) + \mathbb{P}\big([X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k] \big)
\end{aligned}$$

- Et ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) &= \mathbb{P}([X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]) \\
&= \mathbb{P}([X_n = k-1]) \times \mathbb{P}_{[X_n = k-1]}([X_{n+1} = k]) && \textit{(par la formule des probabilités composées)} \\
&= \mathbb{P}([X_n = k-1]) \times p
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1, n+1]\!],\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\ \mathbb{P}([X_n = k-1])}$$

Commentaire

Il est aussi possible de remarquer directement :

$$[X_{n+1} = k] \quad = \quad [X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]$$

La rédaction est très similaire à celle présentée ci-dessus. L'événement $[X_{n+1} = k]$ est réalisé si et seulement si le mobile se trouve en position k à l'instant $n+1$. Comme $k \neq 0$, cela se produit si et seulement si le mobile se trouvait en position $k-1$ à l'instant n et se retrouve en position k à l'instant $n+1$ suite à son déplacement vers la droite. □

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \dots, n-1\},\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k (1-p)$.
En déduire également la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$.
Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$
  où $\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k (1-p)$.
  - **Initialisation** :
    D'après la question ***2.b)*** : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p^k (1-p)$).
    Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Deux cas se présentent :
    × si $k = 0$:
      D'une part : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) = 1 - p$.
      D'autre part : $p^0\ (1-p) = 1 - p$.
      Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vérifiée dans ce cas.
    × si $k \in [\![1, n]\!]$:
      D'après la question précédente :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) & = & p\ \mathbb{P}([X_n = k-1]) & \\ & = & p \times p^{k-1}(1-p) & \textit{(d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à } k-1 \in [\![0, n-1]\!]\textit{)} \\ & = & p^k(1-p) & \end{array}$$
      Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée dans ce cas.
    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k (1-p).}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat de la question précédente appliqué à $k = n+1 \in [\![1, n+1]\!]$:
$$\mathbb{P}([X_{n+1} = n+1]) = p\ \mathbb{P}([X_n = n]) \quad (*)$$
  On peut alors démontrer par récurrence : $\forall \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \mathbb{P}\big([X_n = n]\big) = p^n$.
  - **Initialisation** :
    – D'une part, d'après la question ***1.b)***, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
      Ainsi : $\mathbb{P}\big([X_1 = 1]\big) = p$.
    – D'autre part : $p^1 = p$.
    D'où $\mathcal{P}(1)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}\big([X_{n+1} = n+1]\big) = p^{n+1}$).
    On a :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_{n+1} = n+1]) & = & p\ \mathbb{P}([X_n = n]) & \textit{(d'après l'égalité } (*)\textit{)} \\ & = & p \times p^n & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & p^{n+1} & \end{array}$$
    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_n = n]) = p^n}$$

Ce résultat s'explique par le fait que le seul n-déplacement réalisant $[X_n = n]$ est celui dans lequel le mobile ne fait qu'avancer sans retour en 0. Chaque avancée se produisant avec probabilité p, un tel n-déplacement se déroule avec probabilité p^n.

Commentaire

- On aurait pu démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_n = n]) = p^n$ en utilisant la question ***2.a)***.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  La famille $\left([X_n = k] \right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements d'après ***2.a)***.
  Ainsi :
  $$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k]) + \mathbb{P}([X_n = n]) = 1$$
  On en déduit :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = n]) &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k]) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} p^k\,(1-p) && \textit{(d'après le résultat précédent de cette question)} \\ &= 1 - (1-p) \sum_{k=0}^{n-1} p^k \\ &= 1 - \cancel{(1-p)}\, \frac{1-p^n}{\cancel{1-p}} \\ &= \cancel{1} - (\cancel{1} - p^n) \; = \; p^n \end{aligned}$$
- Ce n'était sans doute pas la méthode attendue au regard de la question suivante. □

c) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = 1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k]) \right) + \mathbb{P}([X_n = n]) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} p^k\,(1-p) \right) + p^n && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.b)}}\textit{)} \\ &= (1-p) \left(\sum_{k=0}^{n-1} p^k \right) + p^n \\ &= \cancel{(1-p)}\, \frac{1-p^n}{\cancel{1-p}} + p^n && \textit{(car } p \neq 1\textit{)} \\ &= 1 - p^n + p^n \; = \; 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = 1}$$
□

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \frac{1}{3}$.
On rappelle que `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1  n = input(' Entrez un entier naturel n : ')
2  X = 0
3  for k = 1:n
4      u = grand(1,1,'uin',0,2)
5      if u == 2 then
6          X = ...........
7      else
8          X = ...........
9      end
10 end
11 disp(X)
```

Démonstration.
Le but de ce programme est de simuler la v.a.r. $X_{\mathtt{n}}$ qui donne la position du mobile à l'instant `n`.
Pour ce faire, le déplacement du mobile est simulé à chaque instant.
Détaillons les différents éléments du script.

- **Début du programme**
  - × On commence par stocker dans une variable `n` une valeur entière stockée par l'utilisateur.
  - × On crée alors une variable informatique `X` dans le but stocker les simulations successives des v.a.r. X_0, X_1, ..., $X_{\mathtt{n}}$. Comme $X_0 = 0$, la variable `X` est initialisée à 0 (ce qui revient à dire que le mobile est initialement en position 0).

```
1  n = input(' Entrez un entier naturel n : ')
2  X = 0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 10 consistent à simuler successivement les v.a.r. X_1, ..., $X_{\mathtt{n}}$.
  Pour cela, on met en place une structure itérative (boucle for) :

```
3  for k = 1:n
4      u = grand(1,1,'uin',0,2)
5      if u == 2 then
6          X = X + 1
7      else
8          X = 0
9      end
10 end
```

L'idée est la suivante. Supposons qu'au début d'un certain tour de boucle $\mathtt{k} \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$ la variable informatique `X` contient une simulation de la v.a.r. $X_{\mathtt{k}}$. Autrement dit, la variable `X` contient une position possible du mobile après `k` instants. L'instant suivant, le mobile se trouve :

– en position `X + 1` s'il s'est déplacé vers la droite. Dans ce cas, on procédera à la mise à jour :

```
6            X = X + 1
```

D'après l'énoncé, ceci doit se produire avec probabilité $p = \frac{1}{3}$.

– en position `0` s'il est revenu en 0. Dans ce cas, on procédera à la mise à jour :

```
8            X = 0
```

D'après l'énoncé, ceci doit se produire avec probabilité $1 - p = \frac{2}{3}$.

Il reste alors à comprendre comment on procède pour que ces mises à jour se fassent avec la bonne probabilité. Ceci est réalisé à l'aide de la fonction `grand`. Plus précisément, l'instruction `grand(1, 1, 'uin', 0, 2)` renvoie 0 avec probabilité $\frac{1}{3}$, 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$ et 2 avec probabilité $\frac{1}{3}$.
Ainsi, la ligne 4 stocke dans une variable `u` :

– la valeur 2 avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

– une valeur de $\{0, 1\}$ avec une probabilité $\frac{2}{3}$.

```
4        u = grand(1,1,'uin',0,2)
```

La mise à jour correspondant au déplacement à droite doit se faire avec probabilité $\frac{1}{3}$.

```
5        if u == 2 then
6            X = X + 1
```

Celle correspondant au retour en 0 doit se faire avec probabilité $\frac{2}{3}$.

```
7        else
8            X = 0
9        end
```

Étant donné le contenu de `X` au début de cette boucle, la variable `X` va contenir une simulation de la v.a.r. $X_{\mathtt{k+1}}$ à l'issue de cette structure conditionnelleet donc au début du $(\mathtt{k}+1)^{\text{ème}}$ tour de boucle.

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `X` contient une simulation de la v.a.r. $X_{\mathtt{n}}$, autrement dit une position possible du mobile après `n` instants. □

5. a) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \geqslant 2, \ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1} = \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2-1} k\ p^{k-1} = \sum_{k=1}^{1} k\ p^{k-1} = 1\ p^0 = 1$.
- D'autre part : $\dfrac{(2-1)\,p^2 - 2\,p^{2-1} + 1}{(1-p)^2} = \dfrac{p^2 - 2p + 1}{(1-p)^2} = \dfrac{(1-p)^2}{(1-p)^2} = 1$.

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

- **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(i.e.\ \sum\limits_{k=1}^{n} k\ p^{k-1} = \dfrac{n\ p^{n+1} - (n+1)\, p^n + 1}{(1-p)^2} \right)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\ p^{k-1} &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1} \right) + n\ p^{n-1} \\
&= \frac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + n\ p^{n-1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1 + n\ (1-p)^2\ p^{n-1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1 + n\ (1 - 2p + p^2)\ p^{n-1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(n-1)\, p^n - \cancel{n\, p^{n-1}} + 1 + \left(\cancel{n\ p^{n-1}} - 2\, n\, p^n + n\, p^{n+1} \right)}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(n-1-2n)\, p^n + 1 + n\, p^{n+1}}{(1-p)^2} \ = \ \frac{n\, p^{n+1} - (n+1)\, p^n + 1}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1} = \frac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}.}$$

□

b) En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p\,(1-p^n)}{1-p}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question ***2.a)***, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
  La v.a.r. X_n est donc finie. Ainsi, X_n admet une espérance.
- De plus, par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k \in X_n(\Omega)} k\ \mathbb{P}([X_n = k]) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\ \mathbb{P}([X_n = k]) \right) + 0 \times \mathbb{P}([X_n = 0]) + n \times \mathbb{P}([X_n = n]) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^k\ (1-p) \right) + n\ p^n && \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{2.b)}}, \textbf{\textit{3.b)}}\textit{)} \\
&= (1-p)\ p\ \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1} \right) + n\ p^n \\
&= \cancel{(1-p)}\ p\ \frac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1}{(1-p)^{\cancel{2}}} + n\ p^n && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= p\ \left(\frac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1 + n\ (1-p)\ p^{n-1}}{1-p} \right)
\end{aligned}$$

On en conclut finalement :

$$\mathbb{E}(X_n) \;=\; p\left(\frac{\cancel{np^n} - p^n - \cancel{n\,p^{n-1}} + 1 + \cancel{n\,p^{n-1}} - \cancel{np^n}}{1-p}\right) \;=\; p\left(\frac{1-p^n}{1-p}\right)$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X_n\right) = \frac{p\left(1-p^n\right)}{1-p}}$$

□

6. a) Montrer, en utilisant la question ***3.a)*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}\left(X_n\right) + 1\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Les v.a.r. X_n et X_{n+1} sont des v.a.r. finies. Elles admettent donc des moments d'ordre 2.
- De plus, par définition du moment d'ordre 2 :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(X_{n+1}^2) & = & \sum\limits_{k\in X_{n+1}(\Omega)} k^2\ \mathbb{P}([X_{n+1}=k]) & \\
 & = & \sum\limits_{k=0}^{n+1} k^2\ \mathbb{P}([X_{n+1}=k]) & \\
 & = & \sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2\ \mathbb{P}([X_{n+1}=k]) & \textit{(car } 0^2\ \mathbb{P}([X_{n+1}=0]) = 0\textit{)} \\
 & = & \sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2\ p\ \mathbb{P}([X_n=k-1]) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \\
 & = & p\ \sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2\ \mathbb{P}([X_n=k-1]) & \\
 & = & p\ \sum\limits_{k=0}^{n} (k+1)^2\ \mathbb{P}([X_n=k]) & \textit{(par décalage d'indice)} \\
 & = & p\left(\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\ \mathbb{P}([X_n=k]) + 2\ \sum\limits_{k=0}^{n} k\ \mathbb{P}([X_n=k]) + \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n=k])\right) & \\
 & = & p\left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\ \mathbb{E}(X_n) + 1\right) & \textit{(par définition des moments et par la question } \textbf{\textit{3.c)}}\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p\left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\ \mathbb{E}(X_n) + 1\right)}$$

□

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\,\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = p\ u_n + \dfrac{p\,(1+p)}{1-p}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par définition de la suite (u_n) :

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} & = & \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) + (2(n+1)-1)\,\dfrac{p^{n+2}}{1-p} & \\[2ex] & = & \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) + (2n+1)\,\dfrac{p^{n+2}}{1-p} & \\[2ex] & = & p\left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\ \mathbb{E}(X_n) + 1\right) + (2n+1)\,\dfrac{p^{n+2}}{1-p} & \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} p\ u_n & = & p\ \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + p\ \ (2n-1)\,\dfrac{p^{n+1}}{1-p} \\[2ex] & = & p\ \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\,\dfrac{p^{n+2}}{1-p} \end{array}$$

- On obtient, par soustraction des deux lignes :

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} - pu_n & = & \cancel{p\ \mathbb{E}(X_n^2)} - \cancel{p\ \mathbb{E}(X_n^2)} + 2p\ \mathbb{E}(X_n) + p + ((\cancel{2n}+1) - (\cancel{2n}-1))\dfrac{p^{n+2}}{1-p} & \\[2ex] & = & 2p\ \dfrac{p(1-p^n)}{1-p} + p + 2\ \dfrac{p^{n+2}}{1-p} & \textit{(d'après la question \textbf{5.b)})} \\[2ex] & = & p\ \dfrac{2p(1-p^n)}{1-p} + p\ \dfrac{1-p}{1-p} + p\ \dfrac{2p^{n+1}}{1-p} & \\[2ex] & = & p\ \dfrac{2p(1-p^n) + (1-p) + 2p^{n+1}}{1-p} & \\[2ex] & = & p\ \dfrac{2p - \cancel{2p^{n+1}} + 1 - p + \cancel{2p^{n+1}}}{1-p} & \\[2ex] & = & p\ \dfrac{1+p}{1-p} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = p\ u_n + p\ \dfrac{1+p}{1-p}}$$

□

c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.

Démonstration.
D'après la formule trouvée dans la question précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

- L'équation de point fixe associée à la suite (u_n) est :
$$x = p\,x + \frac{p(1+p)}{1-p}$$
Elle admet pour unique solution : $\lambda = \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}$.
- On écrit :
$$\begin{array}{rcccccl} u_{n+1} & = & p & \times & u_n & + & \dfrac{p(1+p)}{1-p} \quad (L_1) \\ \lambda & = & p & \times & \lambda & + & \dfrac{p(1+p)}{1-p} \quad (L_2) \end{array}$$
et donc $\quad u_{n+1} - \lambda = p \times (u_n - \lambda) \quad (L_1)-(L_2)$
Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.
- La suite (v_n) est géométrique de raison p.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$v_n = p^n \times v_0 = p^n \times (u_0 - \lambda)$$
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = v_n + \lambda = p^n \times (u_0 - \lambda) + \lambda$$
- Enfin : $u_0 = \mathbb{E}(X_0^2) + (2\times 0 - 1)\dfrac{p^1}{1-p} = \mathbb{E}(0^2) - \dfrac{p}{1-p} = -\dfrac{p}{1-p}$.
- Ainsi : $u_0 - \lambda = -\dfrac{p}{1-p} - \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \dfrac{-p(1-p) - p(1+p)}{(1-p)^2} = -p\dfrac{1-\cancel{p}+1+\cancel{p}}{(1-p)^2} = \dfrac{-2p}{(1-p)^2}$.
- On en conclut :
$$\begin{aligned} u_n &= p^n\,\frac{-2p}{(1-p)^2} + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,(1+p-2p^n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{p}{(1-p)^2}\,(1+p-2p^n)}$$

- Il reste à déterminer $\mathbb{E}(X_n^2)$. Par définition de u_n :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2) &= u_n - (2n-1)\,\frac{p^{n+1}}{1-p} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,(1+p-2p^n) - (2n-1)\,\frac{p^{n+1}}{1-p} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,(1+p-2p^n) - (2n-1)(1-p)\ p^n\ \frac{p}{(1-p)^2} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,((1+p-2p^n) - (2n-1)(1-p)\ p^n) \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,((1+p-2p^n) - (2n-1)(1-p)\ p^n) \end{aligned}$$

- Enfin :

$$-(2n-1)(1-p) = (2n-1)(p-1) = 2np - 2n - p + 1 = (1-2n) + (2n-1)p$$

- On en conclut :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n^2) &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-2p^n+(1-2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\right)\\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p+(-1-2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n^2) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-(1+2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\right)}$$

□

d) Montrer enfin que : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)\,p^n\,(1-p)-p^{2n+1}\right)$.

Démonstration.

- On a déjà vu en question ***6.a)*** que la v.a.r. X_n admet un moment d'ordre 2. Ainsi X_n admet une variance.
- D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}(X_n))^2\\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-(1+2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\right) - \left(\frac{p(1-p^n)}{1-p}\right)^2\\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-(1+2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\right) - \frac{p}{(1-p)^2}\,p(1-p^n)^2\\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+\cancel{p}-(1+2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}-p(\cancel{1}-2p^n+p^{2n})\right)\\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1-(1+2n)p^n+(2n+1)p^{n+1}-p^{2n+1}\right)\\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)p^n(1-p)-p^{2n+1}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)p^n(1-p)-p^{2n+1}\right)}$$

□

7. Dans cette question, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.

En s'inspirant du programme de la question ***4.***, écrire en **Scilab** une fonction `TrajectoireX` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie un vecteur `T` contenant les `n` premières abscisses du mobile.

Démonstration.
On souhaite dans cette question simuler une trajectoire du mobile en n étapes. Le programme de la question ***4.*** quant à lui permet d'obtenir une simulation de la v.a.r. X_n, c'est-à-dire de la position du mobile au bout de n étapes.

Ainsi, pour obtenir la trajectoire en n étapes, il suffit de stocker les positions prises par le mobile à chaque étape dans un vecteur `T`. On modifie donc le programme de la question *4.* de la manière suivante :

```
1  function T = TrajectoireX(n)
2      T = zeros(1, n)
3      for k = 1:n
4          u = grand(1,1,'uin',0,2)
5          if u == 2 then
6              T(i+1) = T(i) + 1
7          else
8              T(i+1) = 0
9          end
10     end
11 endfunction
```

Détaillons les différents éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `TrajectoireX`,
  × elle prend en entrée le paramètre `n`,
  × elle admet pour variable de sortie `T`.

```
1  function T = TrajectoireX(n)
```

  On initialise ensuite la variable `T` au vecteur nul de taille `n`. C'est cette variable qui contiendra la simulation d'une trajectoire du mobile au bout de `n` étapes.

```
2      T = zeros(1, n)
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 10 consistent à mettre à jour la variable `T` pour que ses coordonnées contienne les positions successives du mobile. On procède pour cela comme en question *4.*.

```
3      for k = 1:n
4          u = grand(1,1,'uin',0,2)
5          if u == 2 then
6              T(i+1) = T(i) + 1
7          else
8              T(i+1) = 0
9          end
10     end
```

□