

DS2

Exercice 1 /31

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2

- On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note \mathcal{S}_2 l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer AFA , AGA , AHA .

- **3 pts** : $AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$, $AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

2. Montrer que \mathcal{S}_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de \mathcal{S}_2 . Déterminer la dimension de \mathcal{S}_2 .

- **1 pt** : résolution $\{b = c$ (ou **1 pt pour démonstration complète de sev**)
- **1 pt** : $\mathcal{S}_2 = \text{Vect}(F, G, H)$
- **1 pt** : caractère générateur
- **1 pt** : caractère libre
- **1 pt** : $\dim(\mathcal{S}_2) = 3$

3. a) Montrer : $\forall S \in \mathcal{S}_2, ASA \in \mathcal{S}_2$.

- **2 pts** : si la justification A et S sont symétriques donnée (1 pt si justification absente et 0 si ${}^t(ASA) = {}^tA{}^tS{}^tA$)

b) Déterminer le rang de la famille (AFA, AGA, AHA) .

- **3 pts** : qq soit la méthode
 - × expression sur la base (F, G, H) (1 pour expression, 1 pour opérations sur le rang, 1 pour conclusion)
 - × la même mais directement avec les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$
 - × liberté de la famille (2 pour la liberté et 1 pour conclusion)

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

On note de plus :

$$E_{-4} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = -4X\}$$

$$E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = X\}$$

$$E_{16} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 16X\}$$

4. a) Démontrer : $E_{-4} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$.

• 1 pt : écriture système

• 1 pt : résolution $\begin{cases} x & = & -z \\ 4y & = & -3z \end{cases}$

• 1 pt : $E_{-4} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$

b) En déduire une base et la dimension de E_{-4} .

• 1 pt : caractère générateur et libre

• 1 pt : $\dim(E_{-4}) = 1$

5. En procédant comme en question 4., déterminer de même une base et la dimension de E_1 .

• 1 pt : résolution $\begin{cases} x & = & 4z \\ y & = & -2z \end{cases}$

• 1 pt : $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

• 1 pt : caractère générateur et libre

• 1 pt : $\dim(E_1) = 1$

6. On note $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

• 3 pts : $P^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

7. Montrer : $M = PDP^{-1}$.

• 1 pt : $DP^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -8 & -12 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \\ 16 & 64 & 64 \end{pmatrix}$ ou $PD = \begin{pmatrix} -16 & 4 & 16 \\ -12 & -2 & 32 \\ 16 & 1 & 64 \end{pmatrix}$

• 1 pt : $PDP^{-1} = M$

8. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.

• 1 pt

9. En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

• 1 pt : $D^3 - 13D^2 - 52D + 64I$ (car I et D commutent !)

• 1 pt : puissances de M en fonction de D

• 1 pt : multiplication matricielle

Exercice 2 /45

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2 .

- **3 pts** : $u_0 = 2, u_1 = 3$ et $u_2 = \frac{15}{4}$

0 si donnés sous forme non simplifiée

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 2$.

- **1 pt** : $u_n = 2 \times \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$
- **1 pt** : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, 1 + \frac{1}{2^k} \geq 1$

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n) .

- **1 pt** : $u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) u_n$
- **1 pt** : $u_n > 0$
- **1 pt** : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et donc $u_{n+1} \geq u_n$

c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1 , on a : $\ln(1+x) \leq x$.

- **1 pt** : \ln concave sur $]0, +\infty[$
- **1 pt** : équation de tangente $y = x - 1$
- **1 pt** : application à $x = 1 + t \in]0, +\infty[$

d) En déduire, pour tout entier naturel n , un majorant de $\ln(u_n)$.

- **1 pt** : $\ln \left(\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \right) = \sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$
- **1 pt** : $\frac{1}{2^k} \in]-1, +\infty[$, on peut donc appliquer la qst précédente
- **1 pt** : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$
- **1 pt** : $1 - \frac{1}{2^{n+1}} \leq 2$

3. a) En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , élément de $[2, e^2]$.

- **1 pt** : majoration de (u_n) par e^2
- **1 pt** : théorème de convergence monotone
- **1 pt** : encadrement de ℓ

b) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$.

- **1 pt** : structure de raisonnement par l'absurde
0 si négation fausse
- **1 pt** : par récurrence immédiate $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}$
- **1 pt** : passage à la limite : $\ell \geq u_{n_0} > \ell$

4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

• **1 pt : continuité de \ln en $\ell \in [2, e^2] \subset]0, +\infty[$**

• **1 pt : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$**

b) Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , on a : $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

• **1 pt**

c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a) : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.

• **1 pt : minoration**

• **2 pts : majoration**

× **1 pt : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$**

× **1 pt : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$**

d) Dédire de la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

• **1 pt : croissance de \exp sur \mathbb{R} et décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$**

• **1 pt : $\ell > 0$**

e) Justifier que, pour tout réel x , on a : $1 - e^{-x} \leq x$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.

Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

• **1 pt : inégalité $1 - e^{-x} \geq x$**

• **1 pt : application inégalité de convexité à $x = \frac{1}{2^n}$**

• **3 pts : critère de comparaison des SATP**

× **encadrement**

× **convergence de la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$**

× **citation du critère**

5. Écrire en **Scilab** une fonction `SuiteU` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie le terme u_n .

• **4 pts :**

× **1 pt : structure de fonction**

× **1 pt : initialisation**

× **2 pts : boucle for**

6. a) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{e^2}{2^n}$.

Déterminer un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq 10^{-3}$.

- **1 pt** : $\ell - u_n \leq \frac{e^2}{2^n}$ car $\ell \leq e^2$

- **1 pt** : gestion valeur absolue

- **1 pt** : minoration de N

- **1 pt** : valeur de $N = \lceil \frac{3 \ln(10) + 2}{\ln(2)} \rceil$

b) Dédire de cet encadrement un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près (on pourra utiliser la fonction **SuiteU**).

- **3 pts** : **1 pt par ligne**

Exercice 3 /25

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (le roi de carreau et le roi de cœur), et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Partie I : Premier protocole

Les $2n$ cartes du jeu sont alignées, face cachée, sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, \dots, 2n - 1\}, \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}$.

• **3 pts : peu importe la méthode**

× **dénombrement : 2 pts pour** $\text{Card}([X = k]) = (2n - 2) \cdots (2n - k + 1)(2n - k)2$ **et 1 pt pour** $\text{Card}(\Omega') = 2n(2n - 1)(2n - 2) \cdots (2n - k + 1)$

× **FPC : 1 pt pour** $[X = k] = \overline{R_1} \cap \cdots \cap \overline{R_{k-1}} \cap R_k$, **1 pt pour FPC, 1 pt pour** $\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \cdots \cap \overline{R_{j-1}}}(\overline{R_j}) = \frac{2n - 1 - j}{2n + 1 - j}$ **et** $\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \cdots \cap \overline{R_{k-1}}}(R_k) = \frac{2}{2n + 1 - k}$

2. a) Démontrer : $\forall m \geq 1, \sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

• **1 pt : initialisation**

• **2 pts : hérédité**

b) Démontrer : $\mathbb{E}(X) = \frac{2n+1}{3}$.

• **1 pt : $X(\Omega) \subset \llbracket 1, 2n - 1 \rrbracket$**

• **1 pt : X est finie donc admet une espérance**

• **2 pts : calcul (1 point pour $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{2n-1} k\mathbb{P}([X = k])$ même si calcul erroné par la suite)**

3. Les $2n$ cartes étant alignées face cachée devant le joueur, on considère le jeu d'argent régi par les règles suivantes :

- les cartes sont découvertes de gauche à droite,
- chaque découverte de carte coûte un euro,
- le jeu s'arrête lorsque le premier roi rouge est découvert.

La partie est alors considérée comme gagnée et on verse a euros au joueur.

(la découverte de cette carte, comme les précédentes, coûte 1 euro au joueur)

On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte, G_1 prend la valeur $a - k$.

a) Exprimer G_1 en fonction de a et X .

• **1 pt**

0 à la moindre confusion d'objet

b) En déduire l'espérance de la variable aléatoire G_1 .

• **1 pt : G_1 admet une espérance en tant que transformée affine de X**

• **1 pt : par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}(G_1) = a - \frac{2n+1}{3}$**

Partie II : Deuxième protocole

On reprend le protocole précédent en ajoutant la règle suivante :

- le joueur découvre au maximum n cartes.

Ainsi, contrairement au protocole précédente, la victoire du joueur n'est plus assurée. On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Par exemple, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte ($k \leq n$), G_2 prend la valeur $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 prend la valeur $-n$.

4. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer $\mathbb{P}([G_2 = a - k])$.

- **1 pt** : $[G_2 = a - k] = [X = k]$ **et utilisation qst 1.**

5. Vérifier : $\mathbb{P}([G_2 = -n]) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$.

- **1 pt** : $G_2(\Omega) \subset \{a - k \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \cup \{-n\}$
- **1 pt** : $([G_2 = a - 1], [G_2 = a - 2], \dots, [G_2 = a - n], [G_2 = -n])$ **forme un SCE**
- **2 pts** : **calcul**

6. Montrer : $\mathbb{E}(G_2) = \frac{3(3n-1)a - (7n^2 - 1)}{6(2n-1)}$.

- **1 pt** : G_2 **est finie donc admet une espérance**
- **3 pts** : **calcul**

Partie III : Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$).

7. Déterminer, selon les valeurs de a , le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

- **3 pts** : **protocole 1 plus favorable ssi $a > \frac{17}{3}$ (dont 1 pour l'application de $n = 16$)**

Problème /61

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O .

Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n , alors, à l'instant $(n + 1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k + 1)$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$) ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1 - p$.

Pour tout n de \mathbb{N} , on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que, pour tout n de \mathbb{N} X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. a) Pour tout k de \mathbb{N}^* , exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i .

• 1 pt : explication claire de la CNS pour que $[T = k]$ soit réalisé

• 2 pts : formule $[T = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = i] \right) \cap [X_k = 0]$

b) Donner la loi de X_1 .

• 1 pt : $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$

• 1 pt : $\mathbb{P}([X_1 = 0]) = 1 - p$ et $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = p$

• 1 pt : $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

c) En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout k de \mathbb{N}^* , puis reconnaître la loi de T .

• 1 pt : écriture correcte formule des probas composées

• 1 pt : explication de l'existence des probas conditionnelles

• 1 pt : $\mathbb{P}([T = k]) = p \times \dots \times p \times (1 - p) = p^{k-1} (1 - p)$

• 1 pt : $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$

• 1 pt : $T \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - p)$

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

• 1 pt : initialisation : $X_0(\Omega) = \{0\} = \llbracket 0, 0 \rrbracket$

• 2 pt : hérédité

b) Pour tout n de \mathbb{N}^* , utiliser le système complet d'événements $([X_{n-1} = k])_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.

• 1 pt : la famille $([X_{n-1} = k])_{0 \leq k \leq n-1}$ est un système complet d'événements d'après la question précédente.

• 1 pt : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k] \cap [X_n = 0])$

• 1 pt : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \neq 0$

• 1 pt : $\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) = 1$

3. a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\}, \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p \mathbb{P}([X_n = k-1])$.

- 1 pt : $\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \mathbb{P}([X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k])$
- 1 pt : formule des probabilités composées et $\mathbb{P}([X_n = k-1]) \neq 0$
- 1 pt : $\mathbb{P}_{[X_n = k-1]}([X_{n+1} = k]) = p$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k (1-p)$.
 En déduire également la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$.
 Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

- 1 pt : initialisation première récurrence
- 2 pts : hérédité première récurrence
- 0 pt : initialisation deuxième récurrence
- 2 pts : hérédité deuxième récurrence
- 1 pt : toute explication probabiliste raisonnable

c) Vérifier : $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

- 2 pts : calcul

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \frac{1}{3}$.

On rappelle que `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```

1  n = input(' Entrez un entier naturel n : ')
2  X = 0
3  for k = 1:n
4      u = grand(1,1,'uin',0,2)
5      if u == 2 then
6          X = .....
7      else
8          X = .....
9      end
10 end
11 disp(X)
    
```

- 2 pts : $X = X + 1$
- 1 pt : $X = 0$
- 1 pt : (BONUS) explications raisonnables

5. a) Montrer : $\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

- 1 pt : initialisation
- 2 pt : hérédité

b) En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.

- **1 pt** : X_n est finie donc X_n admet une espérance
- **1 pt** : $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X_n = k])$
- **1 pt** : $\mathbb{E}(X_n) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}([X_n = k]) \right) + 0 \times \mathbb{P}([X_n = 0]) + n \times \mathbb{P}([X_n = n])$
- **1 pt** : reste du calcul

6. a) Montrer, en utilisant la question 3a) : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1)$.

- **1 pt** : les v.a.r. X_n et X_{n+1} sont des v.a.r. finies. Elles admettent donc des moments d'ordre 2.
- **1 pt** : $\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 \mathbb{P}([X_{n+1} = k])$ par définition
- **1 pt** : découpage de la somme (cas de l'indice 0 traité à part)
- **1 pt** : $\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \mathbb{P}([X_n = k - 1])$ d'après la question 3.a) (ici $k \geq 1$)
- **2 pt** : fin du calcul

b) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \mathbb{E}(X_n^2) + (2n - 1) \frac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer : $u_{n+1} = p u_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$.

- **1 pt** : $u_{n+1} = p(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1) + (2n + 1) \frac{p^{n+2}}{1-p}$
- **1 pt** : $p u_n = p \mathbb{E}(X_n^2) + (2n - 1) \frac{p^{n+2}}{1-p}$
- **1 pt** : $u_{n+1} - p u_n = p \frac{1+p}{1-p}$

c) En déduire l'expression de u_n , puis celle de $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de p et n .

- **1 pt** : (u_n) est une suite arithmético-géométrique
- **1 pt** : méthode connue
- **1 pt** : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{p}{(1-p)^2} (1 + p - 2p^n)$
- **1 pt** : $\mathbb{E}(X_n^2) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 + p - (1 + 2n)p^n + (2n - 1)p^{n+1})$

d) Montrer enfin : $\mathbb{V}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n + 1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$.

- **1 pt** : justification que X_n admet une variance.
- **1 pt** : $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}(X_n))^2$ d'après la formule de Kœnig-Huygens.
- **2 pt** : fin du calcul

7. Dans cette question, on prend $p = \frac{1}{3}$.

En s'inspirant du programme de la question 4., écrire en **Scilab** une fonction `TrajectoireX` prenant en paramètre un entier n et calculant en sortie un vecteur T contenant les n premières abscisses du mobile.

- **1 pt** : structure fonction correcte
- **1 pt** : initialisation $T = \text{zeros}(1, n)$
- **2 pt** : boucle `for` correcte pour remplir T