DS2

Exercice 1

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2

- On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer AFA, AGA, AHA.

2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$.
Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.

3. ***a)*** Montrer : $\forall S \in \mathcal{S}_2,\ ASA \in \mathcal{S}_2$.

b) Déterminer le rang de la famille (AFA, AGA, AHA).

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

On note de plus :

$$\begin{aligned} E_{-4} &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = -4X\} \\ E_1 &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = X\} \\ E_{16} &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 16X\} \end{aligned}$$

4. ***a)*** Démontrer : $E_{-4} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$.

b) En déduire une base et la dimension de E_{-4}.

5. En procédant comme en question ***4.***, déterminer de même une base et la dimension de E_1.

6. On note $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

7. Montrer : $M = PDP^{-1}$.

8. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.

9. En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

2. ***a)*** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).

c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.

d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.

3. ***a)*** En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $\left[2, \mathrm{e}^2\right]$.

b) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$.

4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question ***3a)*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}$.

d) Déduire de la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

e) Justifier que, pour tout réel x, on a : $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

5. Écrire en **Scilab** une fonction `SuiteU` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie le terme $u_{\texttt{n}}$.

6. ***a)*** Justifier : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{2^n}$.
Déterminer un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.

b) Déduire de cet encadrement un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près (*on pourra utiliser la fonction* `SuiteU`).

Exercice 3

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (le roi de carreau et le roi de cœur), et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Partie I : Premier protocole

Les $2n$ cartes du jeu sont alignées, face cachée, sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, \ldots, 2n-1\}, \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$.

2. ***a)*** Démontrer : $\forall m \geqslant 1,\ \sum\limits_{k=1}^{m} k^2 = \dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

b) Démontrer : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.

3. Les $2n$ cartes étant aligées face cachée devant le joueur, on considère le jeu d'argent régi par les règles suivantes :

- les cartes sont découvertes de gauche à droite,
- chaque découverte de carte coûte un euro,
- le jeu s'arrête lorsque le premier roi rouge est découvert.
  La partie est alors considérée comme gagnée et on verse a euros au joueur.
  (la découverte de cette carte, comme les précédentes, coûte 1 *euro au joueur)*

On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte, G_1 prend la valeur $a - k$.

a) Exprimer G_1 en fonction de a et X.

b) En déduire l'espérance de la variable aléatoire G_1.

Partie II : Deuxième protocole

On reprend le protocole précédent en ajoutant la règle suivante :
– le joueur découvre au maximum n cartes.

Ainsi, contrairement au protocole précédente, la victoire du joueur n'est plus assurée. On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Par exemple, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 prend la valeur $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 prend la valeur $-n$.

4. Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer $\mathbb{P}([G_2 = a - k])$.

5. Vérifier : $\mathbb{P}([G_2 = -n]) = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.

6. Montrer : $\mathbb{E}(G_2) = \dfrac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)}$.

Partie III : Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$).

7. Déterminer, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. ***a)*** Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.

b) Donner la loi de X_1.

c) En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.

2. ***a)*** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $([X_{n-1} = k])_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.

3. ***a)*** Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \dots n+1\},\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\, \mathbb{P}([X_n = k-1])$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \dots, n-1\},\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k (1-p)$.
En déduire également la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$.
Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

c) Vérifier que $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
On rappelle que `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input(' Entrez un entier naturel n : ')
X = 0
for k = 1:n
    u = grand(1,1,'uin',0,2)
    if u == 2 then
        X = ...........
    else
        X = ...........
    end
end
disp(X)
```

5. ***a)*** Montrer : $\forall n \geqslant 2,\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \dfrac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

b) En déduire que $\mathbb{E}\,(X_n) = \dfrac{p\,(1-p^n)}{1-p}$.

6. ***a)*** Montrer, en utilisant la question ***3a)*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}\,(X_n) + 1\right)$.

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\,\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = p\ u_n + \dfrac{p\,(1+p)}{1-p}$.

c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.

d) Montrer enfin que : $\mathbb{V}\,(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)\,p^n\,(1-p) - p^{2n+1}\right)$.

7. Dans cette question, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.

En s'inspirant du programme de la question ***4.***, écrire en **Scilab** une fonction `TrajectoireX` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie un vecteur `T` contenant les `n` premières abscisses du mobile.