

---

## DS1 /141

---

### I. Exercice 1 /32

On désigne par  $Id$  l'endomorphisme identité de  $\mathbb{R}^3$  et par  $I$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et on considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la

matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est :  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ .

1. a) Calculer  $(A - 3I)^2$ .

– 1 pt

b) En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

– 1 pt : calcul

– 1 pt : multiplication externe

2. On note  $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$ .

a) Résoudre l'équation  $AX = 3X$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

– 1 pt : écriture du système

– 1 pt : résolution  $\{z = x + \frac{1}{2}y\}$

b) En déduire que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et déterminer une base de  $F$ .

– 1 pt :  $F = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

– 1 pt : famille génératrice

– 1 pt : famille libre

– 1 pt : conclusion

3. On note  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

a) Démontrer que  $P$  est inversible et déterminer son inverse.

– 3 pts :  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  (dont 1 pt pour justification inversibilité)

b) Montrer que  $P^{-1}AP = T$  où  $T$  est la matrice triangulaire supérieure  $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

– 1 pt :  $AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  ou  $P^{-1}A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

– 1 pt :  $P^{-1}AP = T$

c) Démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = T^n$ .

- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité

4. a) Exhiber une matrice  $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $T$  s'écrit  $T = 3I + N$ .

– 1 pt :  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calculer  $N^2$  et en déduire  $N^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

- 1 pt :  $N^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$
- 1 pt : par récurrence immédiate :  $\forall k \geq 2, N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer  $T^n$  à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- 1 pt :  $3I$  et  $N$  commutent
- 1 pt : formule du binôme correcte
- 1 pt : découpage valable car  $n \geq 1$
- 1 pt :  $\forall k \geq 2, N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$
- 1 pt :  $\forall j \in \mathbb{N}, I^j = I$
- 1 pt :  $T^n = 3^n I + n 3^{n-1} N$
- 1 pt : cas  $n = 0$

d) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer enfin  $T^n$  comme combinaison linéaire de  $I$  et  $T$ .

– 1 pt :  $T^n = n 3^{n-1} T - (n-1) 3^n I$

5. a) Expliquer pourquoi l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = n 3^{n-1} A - (n-1) 3^n I$ .

- 1 pt : écrire l'expression de la question précédente avec  $I$  et  $T$
- 2 pts : utilisation de  $A^n = P T^n P^{-1}$

b) Vérifier que la formule trouvée à la question 5.a) reste valable pour  $n = -1$ .

- 1 pt
- 0 pt pour toute erreur de logique

## II. Exercice 2 /40

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}_+$  par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

### 1. Variation de $f$

a) Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$ .

- 1 pt :  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+$
- 1 pt :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{(1-x)e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$

b) Montrer que l'équation  $f'(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  et une seule sur  $\mathbb{R}_+$ .  
 Pour ce faire, on étudiera la variation de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$g(x) = (1-x)e^x + 1$$

- 1 pt :  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$
- 1 pt :  $g$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = -xe^x$
- 1 pt : variations de  $g$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  et  $g(0) = 2$
- 3 pts : théorème de la bijection
  - × 1 pt : hypothèses
  - × 1 pt :  $g([0, +\infty[) = ]-\infty, 2]$
  - × 1 pt :  $0 \in ]-\infty, 2]$

c) Prouver que :  $f(\alpha) = \alpha - 1$ .

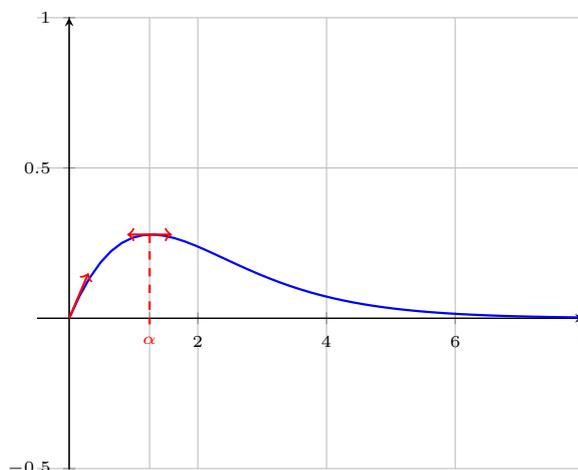
- 2 pts

d) Dresser le tableau de variation de  $f$  et donner l'allure du graphe de cette fonction.

- 2 pts : tableau de variations (variations + limites)

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de $f$			

- 4 pts : courbe (2 tangentes, placer  $\alpha$ , allure générale)



2. Approximation de  $\alpha$

Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par la relation :

$$\varphi(x) = 1 + e^{-x}$$

a) Prouver que  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $\varphi(x) = x$ .

- **2 pts** :  $\varphi(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$  (dont **1 pt** :  $e^{-x} > 0$ )
- **1 pt** : **solution unique**

b) Montrer que  $\alpha > 1$ . En déduire que :

$$\alpha - 1 < e^{-1}$$

- **1 pt** :  $g(\alpha) = 0$  et  $g(1) = 1$  donc  $g(\alpha) < g(1)$
- **1 pt** : **application de  $g^{-1} : [0, +\infty[ \rightarrow ]-\infty, 2]$  strictement décroissante**
- **1 pt** :  **$\varphi$  strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$**
- **1 pt** : **par composition par  $\varphi$  :  $\varphi(\alpha) < \varphi(1)$ , i.e.  $\alpha < 1 + e^{-1}$**

c) Établir que, pour tout nombre réel  $x$  supérieur ou égal à 1 :

$$\varphi(x) \geq 1$$

et que

$$|\varphi(x) - \alpha| \leq e^{-1} |x - \alpha|$$

- **1 pt** :  $\forall x \geq 1, \varphi(x) \geq 1$
- **1 pt** :  $\forall x \geq 1, |\varphi'(x)| \leq e^{-1}$
- **3 pts** : **IAF**
  - × **1 pt** : **IAF « brutale » (hypothèses donc  $\forall (u, v) \in [1, +\infty[^2, |\varphi(v) - \varphi(u)| \leq e^{-1} |v - u|$ )**
  - × **1 pt** : **en appliquant cette inégalité à  $v = x \in [1, +\infty[$  et  $u = \alpha \in [1, +\infty[$  (d'après 2.b))**
  - × **1 pt** :  **$\varphi(\alpha) = \alpha$  d'après 2.a)**

d) Soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite d'éléments de  $[1; +\infty[$  définie par la condition initiale  $\alpha_0 = 1$  et par la relation de récurrence :

$$\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n)$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|\alpha_n - \alpha| \leq e^{-(n+1)}$$

- **1 pt** :  $\alpha_n \geq 1$
- **1 pt** : **en appliquant inégalité de la question précédente à  $x = u_n \in [1, +\infty[$  :  $|u_{n+1} - \alpha| \leq e^{-1} |u_n - \alpha|$**
- **3 pts** : **récurrence**
  - × **1 pt** : **initialisation**
  - × **2 pts** : **hérédité**

e) En déterminant au préalable le nombre d'itérations nécessaires, écrire en **Scilab** un programme permettant de trouver et d'afficher une valeur décimale approchée  $\tilde{\alpha}$  de  $\alpha$  telle que :

$$|\tilde{\alpha} - \alpha| \leq 10^{-6}$$

- **1 pt** : **transitivité**
- **2 pts** :  $N = \lceil 6 \ln(10) - 1 \rceil$
- **4 pts** : **programme (1 pt pour initialisation, 2 pts pour boucle for, 1 pt pour disp)**

### III. Exercice 3 /35

Soit un réel  $x_0 > 0$ . On définit la suite  $(x_n)$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ .

1. Démontrer que la suite  $(x_n)$  est bien définie et à termes strictement positifs.
  - **1 pt : initialisation**
  - **2 pts : hérédité**
2. Montrer que la suite  $(x_n)$  est monotone et préciser sa monotonie.
  - **1 pt :  $(x_n)$  est (strictement) croissante**
3. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite  $(x_n)$  diverge vers  $+\infty$ .
  - **4 pts : raisonnement par l'absurde pour  $(x_n)$  non majorée**
    - × **1 pt : structure du raisonnement par l'absurde**
    - × **1 pt : par passage à la limite :  $\ell \geq 0$**
    - × **1 pt : absurdité si  $\ell > 0$  (en passant à la limite dans la relation de récurrence)**
    - × **1 pt : absurdité si  $\ell = 0$  (même démarche)**
  - **1 pt :  $(x_n)$  croissante non majorée donc elle diverge vers  $+\infty$**
4. Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{1}{x_n}$ .
  - **1 pt :  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{x_n} = x_{n+1} - x_n$**
  - **1 pt : télescopage :  $\sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0$**
  - **1 pt :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$  donc  $\sum \frac{1}{x_n}$  divergente**
5. Le but de cette question est de déterminer la nature de la série  $\sum \frac{1}{x_n^2}$ .
  - a) On suppose dans cette question que la série  $\sum \frac{1}{x_n^2}$  converge. On note  $\ell$  sa somme ( $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x_k^2}$ ).
    - (i) Démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n^2 - x_0^2 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$ .
      - **1 pt :  $\forall k \in \mathbb{N}, x_{k+1}^2 - x_k^2 = 2 + \frac{1}{x_k^2}$**
      - **1 pt : sommation pour  $k$  variant de 0 à  $n-1$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )**
      - **1 pt : télescopage :  $\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) = x_n^2 - x_0^2$**
    - (ii) En déduire que la suite  $\left(\frac{x_n^2}{n}\right)$  converge vers 2.
      - **1 pt :  $\frac{x_n^2}{n} = \frac{x_0^2}{n} + 2 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$**
      - **1 pt : comme  $\sum \frac{1}{x_n^2}$  converge,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} = 0$**

(iii) En déduire un équivalent de la suite  $\left(\frac{1}{x_n^2}\right)$ .

Cela est-il cohérent avec la supposition initiale ?

– 1 pt :  $\frac{1}{x_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

– 3 pts : critère d'équivalence des SATP (1 pt par hypothèse, notamment la positivité)

– 1 pt : il est absurde de trouver que  $\sum \frac{1}{x_n^2}$  diverge alors qu'on a supposé que cette série converge

b) Démontrer que la série  $\sum \frac{1}{x_n^2}$  diverge.

– 1 pt : raisonnement par l'absurde

6. On définit la suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

a) Montrer, pour tout entier naturel  $k$  non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

où  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

– 1 pt : décroissance de la fonction inverse sur  $]0, +\infty[$

– 1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant

b) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$ .

– 1 pt :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

– 1 pt : sommation télescopique

– 1 pt :  $H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n$

– 1 pt :  $H_n \leq 1 + \ln(n)$

c) Déterminer un équivalent simple de la suite  $(H_n)$ .

– 1 pt : division par  $\ln(n) > 0$

0 pt si  $n \geq 2$  non précisé

– 1 pt :  $h_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$  par théorème d'encadrement

7. On définit la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2}$ . Dans la suite, on admet :

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} H_n$$

a) En utilisant le résultat de la question 5.a)(i), démontrer :  $x_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n$ .

– 1 pt : d'après résultat de l'énoncé :  $\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{4n}$

– 1 pt :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} = 0$  par croissances comparées

– 1 pt :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n^2}{2n} = 1$

b) En déduire un équivalent de la suite  $(x_n)$ .

– 1 pt :  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n}$

**0 pt si oublié de l'argument de stricte positivité**

## IV. Exercice 4 /34

On admet l'encadrement suivant :  $2,7 < e < 2,8$ .

### Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $t \in ]0, +\infty[$  par :

$$f(t) = \begin{cases} t \ln(t) - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

- 1 pt : continuité sur  $\mathbb{R}_+^*$
- 1 pt :  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$  et conclusion

2. Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et calculer  $f'(t)$  pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ .

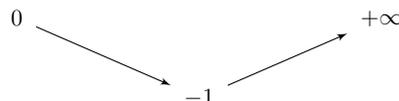
- 1 pt : caractère  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$
- 1 pt :  $\forall t \in ]0, +\infty[, f'(t) = \ln(t)$

3. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

- 2 pts :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$

4. Dresser le tableau des variations de  $f$ .

- 2 pts : tableau correct avec limites

$t$	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	-	0	+
Variations de $f$			

5. Montrer que  $f$  est convexe sur  $]0, +\infty[$ .

- 2 pts (dont 1 pour  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$  si calcul de  $f''$ )

6. On note  $\Gamma$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

a) Montrer que  $\Gamma$  admet une demi-tangente en  $O$ .

- 2 pts :  $\Gamma$  admet une demi-tangente verticale en  $O$

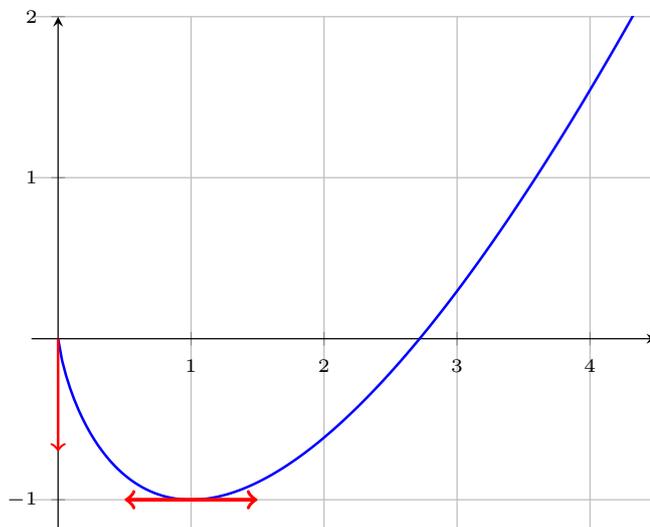
b) Déterminer les points d'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe des abscisses.

- 1 pt : écriture du système  $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$

- 1 pt : résolution :  $(0, 0)$  et  $(0, e)$  sont les points d'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe des abscisses

c) Tracer  $\Gamma$ .

- 4 pts : 1 pour tangente verticale tracée, 1 pt pour tangente horizontale tracée, 1 point pour notion de tangente respectée, 1 pt pour allure globale (notamment aspect convexe)



## Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application  $G : ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ , par :

$$G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$$

1. Montrer que  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]1, +\infty[$  et que, pour tout  $x \in ]1, +\infty[$  :

$$G'(x) = \frac{1}{2} (f(x+1) - f(x-1))$$

et

$$G''(x) = \frac{1}{2} (\ln(x+1) - \ln(x-1))$$

À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive  $F$  de  $f$  sans chercher à calculer  $F$ .

- 1 pt : la fonction  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . Elle admet donc une primitive  $F$  sur  $[0, +\infty[$  et :  $\forall x \in ]1, +\infty[, G(x) = \frac{1}{2} (F(x+1) - F(x-1))$
- 1 pt :  $F$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$
- 1 pt :  $G$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$  (pour la composée  $x \mapsto F(x+1)$  par exemple)
- 1 pt :  $\forall x \in ]1, +\infty[, G'(x) = \frac{1}{2} (f(x+1) - f(x-1))$
- 1 pt :  $\forall x \in ]1, +\infty[, G''(x) = \frac{1}{2} (\ln(x+1) - \ln(x-1))$

2. a) Montrer que  $G'$  est strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ .

- 2 pts

b) Vérifier :  $G'(2) > 0$ .

- 1 pt

c) Établir que l'équation  $G'(x) = 0$ , d'inconnue  $x \in ]1, +\infty[$ , admet une solution et une seule, notée  $\alpha$ , et que  $\alpha < 2$ .

– **2 pts : théorème bijection**

× **1 pt : hypothèses**

× **1 pt** :  $G' ]1, +\infty[ = ] \lim_{x \rightarrow 1^+} G'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} G'(x)[$

– **1 pt** :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} G'(x) = G'(1) = \ln(2) - 1 > 0$

– **1 pt** :  $\forall x \in ]1, +\infty[, G'(x) = (x - 1) \ln \left( 1 + \frac{2}{x - 1} \right) + 2 \ln(x + 1) - 2$

– **1 pt** :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G'(x) = +\infty$

– **1 pt** :  $0 \in ]G'(1), +\infty[$

– **1 pt** :  $G'(2) > 0 = G'(\alpha)$

– **1 pt** :  $(G')^{-1} : G' ]1, +\infty[ \rightarrow ]1, +\infty[$  **est strictement croissante**