DS1

I. Exercice 1

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Calculer $(A - 3I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. On note $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

a) Résoudre l'équation $AX = 3X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = T^n$.

4. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = 3I + N$.

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

5. ***a)*** Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^nI$.

b) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

II. Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

1. *Variation de f*

a) Calculer la dérivée f' de f.

b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur $\mathbb{R}_+$.
Pour ce faire, on étudiera la variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = (1 - x)\ \mathrm{e}^x + 1$$

c) Démontrer : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

d) Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure du graphe de cette fonction.

2. *Approximation de α*
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

a) Prouver que α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

b) Montrer que $\alpha > 1$. En déduire :

$$\alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}$$

c) Établir que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1 :

$$\varphi(x) \geqslant 1$$

et que

$$|\varphi(x) - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-1}\, |x - \alpha|$$

d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $[1, +\infty[$ définie par la condition initiale $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$$

Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-(n+1)}$$

e) En déterminant au préalable le nombre d'itérations nécessaires, écrire en **Scilab** un programme permettant de trouver et d'**afficher** une valeur décimale approchée $\tilde{\alpha}$ de α telle que :

$$|\tilde{\alpha} - \alpha| \leqslant 10^{-6}$$

III. Exercice 3

Soit un réel $x_0 > 0$. On définit la suite (x_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

1. Démontrer que la suite (x_n) est bien définie et à termes strictement positifs.

2. Montrer que la suite (x_n) est monotone et préciser sa monotonie.

3. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

4. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{x_n}$.

5. Le but de cette question est de déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$.

a) On suppose dans cette question que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ converge. On note ℓ sa somme ($\ell = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{{x_k}^2}$).

(i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ${x_n}^2 - {x_0}^2 = 2n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{{x_k}^2}$.

(ii) En déduire que la suite $\left(\dfrac{{x_n}^2}{n}\right)$ converge vers 2.

(iii) En déduire un équivalent de la suite $\left(\dfrac{1}{{x_n}^2}\right)$.
Cela est-il cohérent avec la supposition initiale ?

b) Démontrer que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ diverge.

6. On définit la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \ \leqslant\ \ln(k+1) - \ln(k) \ \leqslant\ \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

c) Déterminer un équivalent simple de la suite (H_n).

7. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{{x_k}^2}$. Dans la suite, on admet :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\, H_n$$

a) En utilisant le résultat de la question ***5.a)(i)***, démontrer : ${x_n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.

b) En déduire un équivalent de la suite (x_n).

IV. Exercice 4

On admet l'encadrement suivant : $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f : [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0,+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Dresser le tableau des variations de f.

5. Montrer que f est convexe sur $]0,+\infty[$.

6. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O \ ; \ \vec{i} \ ; \ \vec{j}\right)$.

a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O.

b) Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.

c) Tracer Γ.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G :]1,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1,+\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t) \ dt$$

7. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[$ et que, pour tout $x \in]1,+\infty[$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right) \\ \text{et} \quad G''(x) &= \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right) \end{aligned}$$

À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive F de f sans chercher à calculer F.

8. *a)* Montrer que G' est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

b) Vérifier : $G'(2) > 0$.

c) Établir que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que $\alpha < 2$.