

DM1 vB correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n : x \mapsto x^{2n+1} - x^{n+1} - 1$$

1. Étudier les variations de la fonction f_n sur \mathbb{R}_+ .

Démonstration.

- La fonction f_n est dérivable sur \mathbb{R}_+ en tant que fonction polynomiale.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$f'_n(x) = (2n+1)x^{2n} - (n+1)x^n = x^n((2n+1)x^n - n - 1)$$

Deux cas se présentent :

- × si $x = 0$, alors : $f'_n(0) = 0$.
- × si $x > 0$, alors : $x^n > 0$. D'où :

$$\begin{aligned} f'_n(x) \geq 0 &\Leftrightarrow (2n+1)x^n - n - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (2n+1)x^n \geq n+1 \\ &\Leftrightarrow x^n \geq \frac{n+1}{2n+1} && \text{(car } 2n+1 > 0) \\ &\Leftrightarrow n \ln(x) \geq \ln\left(\frac{n+1}{2n+1}\right) && \text{(par stricte croissance de } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow \ln(x) \geq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n+1}{2n+1}\right) && \text{(car } n > 0) \\ &\Leftrightarrow x \geq \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}} && \text{(par stricte croissance de } \exp \text{ sur } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

- En notant $\alpha_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$, on obtient le tableau de variations suivant :

| | | | |
|---------------------|----|-----------------|-----------|
| x | 0 | α_n | $+\infty$ |
| Signe de $f'_n(x)$ | - | 0 | + |
| Variations de f_n | -1 | $f_n(\alpha_n)$ | $+\infty$ |

- Détaillons les éléments de ce tableau :

- × $f_n(0) = 0^{2n+1} - 0^{n+1} - 1 = -1$,
- × Comme : $f_n(x) = x^{2n+1} - x^{n+1} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{2n+1}$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

□

2. a) Montrer que la fonction f_n s'annule une unique fois sur \mathbb{R}_+ .
On note x_n l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question précédente, la fonction f_n est décroissante sur $[0, \alpha_n]$. Ainsi :

$$\forall x \in [0, \alpha_n], \quad f_n(x) \leq f_n(0) = -1$$

En particulier : $\forall x \in [0, \alpha_n], f_n(x) < 0$.

La fonction f_n ne s'annule pas sur $[0, \alpha_n]$.

- D'après la question précédente, la fonction f_n est :

× continue (car dérivable) sur $] \alpha_n, +\infty[$,

× strictement croissante sur $] \alpha_n, +\infty[$.

Ainsi la fonction f_n réalise une bijection de $] \alpha_n, +\infty[$ sur $f_n(] \alpha_n, +\infty[)$, avec :

$$f_n(] \alpha_n, +\infty[) = \left] f_n(\alpha_n), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right[=] f_n(\alpha_n), +\infty[$$

- Or, comme démontré dans le point précédent : $f(\alpha_n) < 0$. D'où : $0 \in] f_n(\alpha_n), +\infty[$.

On en déduit que la fonction f_n s'annule une unique fois sur $] \alpha_n, +\infty[$.

Enfin, la fonction f_n s'annule une unique fois sur $[0, +\infty[$.
On note x_n ce point d'annulation.

Commentaire

- L'énoncé débute avec la quantification de la variable n suivante : « Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ». Les propositions démontrées après l'introduction de cette variable sont donc démontrées **pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$ (aucune autre condition sur la variable n n'apparaît dans l'énoncé).
- On définit donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel x_n . Autrement dit, avec cette question, on définit **la suite** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. □

- b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n > 1$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord : $f_n(1) = 1^{2n+1} - 1^{n+1} - 1 = -1$

- On rappelle de plus, par définition de x_n : $f_n(x_n) = 0$.

Ainsi :

$$f_n(1) < f_n(x_n)$$

On note g_n la réciproque de f_n sur $] \alpha_n, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, la fonction g_n est strictement croissante sur $] f_n(\alpha_n), +\infty[$.

En l'appliquant de part et d'autre de l'inégalité, on obtient :

$$1 < x_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n > 1$$

□

3. a) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• D'une part :

$$\begin{aligned}
 f_{n+1}(x_n) &= (x_n)^{2(n+1)+1} - (x_n)^{(n+1)+1} - 1 \\
 &= (x_n)^{2n+3} - (x_n)^{n+2} - 1 \\
 &= (x_n)^2 x^{2n+1} - (x_n)^{n+2} - 1 \\
 &= (x_n)^2 ((x_n)^{n+1} + 1) - (x_n)^{n+2} - 1 \quad (\text{car, par définition de } x_n : \\
 &\quad (x_n)^{2n+1} - (x_n)^{n+1} - 1 = 0) \\
 &= (x_n)^{n+3} + (x_n)^2 - (x_n)^{n+2} - 1 \\
 &= (x_n)^{n+2} (x_n - 1) + (x_n - 1)(x_n + 1) \\
 &= (x_n - 1) ((x_n)^{n+2} + x_n + 1)
 \end{aligned}$$

Comme $x_n > 1$, on en déduit : $f_{n+1}(x_n) > 0$.

• On rappelle d'autre part, par définition de x_{n+1} : $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.

Ainsi :

$$f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$$

En appliquant de part et d'autre de l'inégalité la fonction g_{n+1} , on obtient :

$$x_n > x_{n+1}$$

On en déduit que la suite (x_n) est (strictement) décroissante.

Commentaire

- On rappelle que les propositions démontrées précédemment le sont pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- En particulier, on démontre en question 2.a) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n admet une bijection réciproque sur $] \alpha_n, +\infty[$ que l'on note g_n .
 Cette propriété est quantifiée universellement en n . Cette variable est donc muette. On pourrait par exemple remplacer toutes les occurrences de la variable n par une variable m et la proposition resterait inchangée : pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_m admet une bijection réciproque sur $] \alpha_m, +\infty[$ que l'on note g_m .
- En appliquant cette proposition à $m = n + 1$, la fonction g_{n+1} est bien définie comme la bijection réciproque de la fonction f_{n+1} sur $] \alpha_{n+1}, +\infty[$.

Commentaire

- Cet exercice consiste en l'étude de la suite (x_n) . On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite (x_n) mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$ sur $[0, +\infty[$

On comprend alors que l'étude de (x_n) va passer par l'étude des propriétés de la fonction f_n .

- De cette définition, on tire la propriété : $\forall m \in \mathbb{N}^*, f_m(x_m) = 0$.

Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite (x_n) .

On l'utilise dans cette question à la fois pour $m = n$ et pour $m = n + 1$.

- Comme la suite (x_n) est définie de manière implicite, on n'étudie pas la monotonie de (x_n) à l'aide de la différence $x_{n+1} - x_n$. Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :

$$f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$$

et de conclure : $x_n > x_{n+1}$ à l'aide d'une propriété de f_n . □

b) Que peut-on en conclure ?

Démonstration.

La suite (x_n) est :

- × décroissante, d'après la question précédente,
- × minorée par 1, d'après la question 2.b).

On en déduit que la suite (x_n) converge vers un réel ℓ tel que : $\ell \geq 1$.

Commentaire

- On rappelle que le passage à la limite est compatible avec les inégalités **larges**. En effet, si la suite (u_n) converge vers ℓ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > a \Rightarrow \ell \geq a$$

- On pourra retenir l'exemple classique de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$:

× d'une part : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > 0$

× d'autre part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \not> 0$

□

4. On note h la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$h : x \mapsto x(x - 1)$$

Montrer que la fonction h réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$h(x) = x(x - 1) = x^2 - x$$

La fonction h est donc dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale.

- Soit $x \in [1, +\infty[$.

$$h'(x) = 2x - 1$$

Comme $x > 1$, on en déduit : $h'(x) > 0$.

La fonction h est donc strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

- On en déduit que la fonction h est :

× continue (car dérivable) sur $[1, +\infty[$,

× strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, la fonction h réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $h([1, +\infty[)$ avec :

$$h([1, +\infty[) = \left[h(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right[= [0, +\infty[$$

La fonction h réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

□

5. a) (i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $(x_n)^n$ en fonction de h^{-1} .

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition de x_n :

$$\begin{aligned} 0 &= f_n(x_n) \\ &= (x_n)^{2n+1} - (x_n)^{n+1} - 1 \\ &= (x_n)^{n+1} ((x_n)^n - 1) - 1 \\ &= x_n \times (x_n)^n ((x_n)^n - 1) - 1 \\ &= x_n h((x_n)^n) - 1 \end{aligned}$$

- De plus :

$$\begin{aligned} x_n h((x_n)^n) - 1 = 0 &\Leftrightarrow x_n h((x_n)^n) = 1 \\ &\Leftrightarrow h((x_n)^n) = \frac{1}{x_n} \quad (\text{car } x_n \neq 0) \\ &\Leftrightarrow (x_n)^n = h^{-1}\left(\frac{1}{x_n}\right) \quad (\text{par bijectivité de } h \text{ sur } [1, +\infty[, \\ &\quad \text{et car } (x_n)^n \in [1, +\infty[(*) \end{aligned}$$

- Démontrons la proposition (*) : $(x_n)^n \in [1, +\infty[$.
D'après la question 2.b) : $x_n > 1$.
Ainsi, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$: $(x_n)^n > 1^n$. D'où :

$$(x_n)^n > 1$$

Finalement : $(x_n)^n = h^{-1}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

□

(ii) En déduire que la suite $((x_n)^n)_{n \geq 1}$ converge.

Démonstration.

- D'après la question 3.b), la suite (x_n) converge vers ℓ avec : $\ell \geq 1$. On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\ell}$$

- De plus, d'après le théorème de la bijection, la fonction h^{-1} est continue sur $[0, +\infty[$ (donc continue en $\frac{1}{\ell}$). Ainsi, la suite $\left(h^{-1}\left(\frac{1}{x_n}\right)\right)_{n \geq 1}$ converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h^{-1}\left(\frac{1}{x_n}\right) = h^{-1}\left(\frac{1}{\ell}\right)$$

Finalement, la suite $((x_n)^n)_{n \geq 1}$ converge vers $h^{-1}\left(\frac{1}{\ell}\right)$.

□

b) Montrer alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.

Indication : on pourra procéder par l'absurde.

Démonstration.

- D'après la question 3.b), on sait : $\ell \geq 1$.
- On procède alors par l'absurde pour montrer : $\ell = 1$.

Supposons : $\ell > 1$.

La suite (x_n) est :

× décroissante,

× vérifie : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq \ell$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$:

$$(x_n)^n \geq \ell^n$$

On obtient :

× $\forall n \in \mathbb{N}^*, (x_n)^n \geq \ell^n$,

× comme $\ell > 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell^n = +\infty$

Par théorème de comparaison, on en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n = +\infty$.

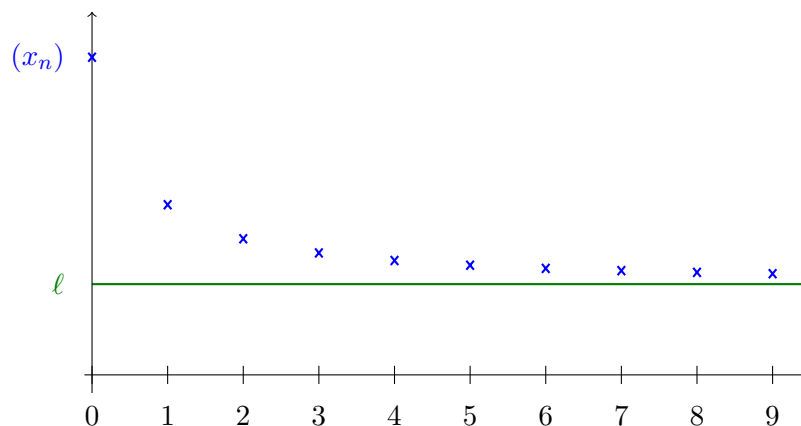
Ceci est absurde d'après la question précédente.

On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.

Commentaire

On peut visualiser sur un graphe l'implication suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \times (x_n) \text{ décroissante,} \\ \times \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq \ell$$



On rappelle qu'elle se démontre à l'aide d'un raisonnement par l'absurde. □

c) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n = \varphi$, où φ est la solution de l'équation $h(x) = 1$ sur $[1, +\infty[$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\ell = 1$.
Ainsi, d'après la question **5.a)(ii)** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n = h^{-1}\left(\frac{1}{\ell}\right) = h^{-1}(1)$$

- On cherche alors à déterminer $\varphi = h^{-1}(1)$. Or :

$$\varphi = h^{-1}(1) \Leftrightarrow h(\varphi) = 1$$

Le réel φ est donc solution de l'équation $h(x) = 1$ sur $[1, +\infty[$.

- D'après la question **4.**, la fonction h réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
Or : $1 \in [0, +\infty[$.
On en déduit que l'équation $h(x) = 1$ admet une unique solution.
Ainsi φ est bien défini et unique.

Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n = \varphi$,
où φ est l'unique solution de l'équation $h(x) = 1$ sur $[1, +\infty[$.

Commentaire

On pouvait même calculer φ explicitement :

- Tout d'abord, soit $x \in [1, +\infty[$:

$$h(x) = 1 \Leftrightarrow x(x-1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

- On note $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par : $P(X) = X^2 - X - 1$.
Calculons le discriminant du polynôme P :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$$

- Ainsi, le polynôme P admet 2 racines :

$$r_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Or φ est la solution **positive** de l'équation $h(x) = 1$ (car h réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$).

On en déduit :

$$\varphi = r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Ce nombre φ est parfois appelé « nombre d'or ».

□

6. a) Déterminer un équivalent de $(\ln(x_n))$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition de x_n :

$$(x_n)^{2n+1} = (x_n)^{n+1} + 1 \Leftrightarrow (2n+1) \ln(x_n) = \ln(1 + (x_n)^{n+1}) \quad (\text{par bijectivité de } \ln \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et car } : x_n > 0)$$

- De plus, d'après la question précédente : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n = \varphi$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + (x_n)^{n+1} &= 1 + \varphi \\ &= \varphi^2 \quad (*) \end{aligned}$$

- Détaillons (*). Par définition de φ :

$$h(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi^2 = \varphi + 1$$

- Enfin, par continuité de la fonction \ln sur $]0, +\infty[$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + (x_n)^{n+1}) = \ln(\varphi^2) = 2 \ln(\varphi)$$

Comme $2 \ln(\varphi) \neq 0$, on en déduit : $\ln(1 + (x_n)^{n+1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \ln(\varphi)$.

- Ainsi :

$$(2n + 1) \ln(x_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \ln(\varphi)$$

D'où :

$$\ln(x_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(\varphi)}{2n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(\varphi)}{2n}$$

Finalement : $\ln(x_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(\varphi)}{n}$.

Commentaire

Si l'on ne remarquait pas la relation $\varphi^2 = \varphi + 1$, on obtenait l'équivalent :

$$\ln(x_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(1 + \varphi)}{2n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(1 + \varphi)}{2n}$$

Celui-ci est tout à fait correct et aurait sans doute été accepté par le jury. □

b) En déduire : $x_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(\varphi)}{n}$.

Démonstration.

- D'une part, d'après la question précédente : $\ln(x_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(\varphi)}{n}$.

- D'autre part : $\ln(x_n) = \ln(1 + (x_n - 1))$.

Or, d'après la question **5.b**) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - 1 = 0$. Ainsi :

$$\ln(1 + (x_n - 1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_n - 1$$

On en déduit : $x_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(\varphi)}{n}$.

Commentaire

L'équivalent est imposé pour cette question. Si l'on n'avait pas exploité la relation $\varphi^2 = \varphi + 1$ en question précédente, elle était indispensable pour conclure cette dernière question. □