DM1 vB

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : x \mapsto x^{2n+1} - x^{n+1} - 1$$

1. Étudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$.

2. ***a)*** Montrer que la fonction f_n s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+$.
On note x_n l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 1$.

3. ***a)*** Montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante.

b) Que peut-on en conclure ?

4. On note h la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$h : x \mapsto x(x-1)$$

Montrer que la fonction h réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

5. ***a) (i)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $(x_n)^n$ en fonction de h^{-1}.

(ii) En déduire que la suite $\big((x_n)^n\big)_{n \geqslant 1}$ converge.

b) Montrer alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$.
Indication : on pourra procéder par l'absurde.

c) En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n)^n = \varphi$, où φ est l'unique solution de l'équation $h(x) = 1$ sur $[1, +\infty[$.

6. ***a)*** Déterminer un équivalent de $\big(\ln(x_n)\big)$.

b) En déduire : $x_n - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(\varphi)}{n}$.