# DM1 vA correction

Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, on définit la fonction $f_n$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

***1. a)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée $u_n$.

*Démonstration.*

- La fonction $f_n$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$f_n'(x) = n\, x^{n-1} + 18\, x \ > \ 0$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

| $x$ | $0$ | $u_n$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $-4$ $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

- La fonction $f_n$ est :
  - $\times$ continue sur $[0, +\infty[$,
  - $\times$ strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

  Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f_n([0, +\infty[)$. Or :

$$f_n([0, +\infty[) \ = \ [f_n(0), \lim_{x \to +\infty} f_n(x)[ \ = \ [-4, +\infty[$$

- Comme $0 \in [-4, +\infty[$, alors $0$ admet un unique antécédent $u_n \in [0, +\infty[$ par la fonction $f_n$.
- Enfin, comme $f_n(0) = -4 \neq 0$, on en déduit : $u_n \neq 0$.

$$\boxed{\text{L'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet donc une unique solution strictement positive (notée } u_n\text{).}}$$

**Commentaire**

- L'énoncé débute avec la quantification de la variable $n$ suivante : « Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ». Les propositions démontrées après l'introduction de cette variable sont donc démontrées **pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$ (aucune autre condition sur la variable $n$ n'apparaît dans l'énoncé). C'est le cas de cette question mais aussi des questions ***2.a)*** (où l'on considère $f_n$ et $f_{n+1}$) et ***2.b)*** (où l'on considère la quantité $f_n(u_{n+1})$).
- En particulier, dans cette question, on démontre qu'à **tout** $n \in \mathbb{N}^*$ on peut associer une valeur $u_n$. C'est donc une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qu'on définit ici et pas seulement une unique quantité $u_n$.

$\square$

***b)*** Calculer $u_1$ et $u_2$.

*Démonstration.*

- Par définition, $u_1$ est l'unique solution strictement positive de l'équation $f_1(x) = 0$ où $f_1$ est la fonction $f_1 : x \mapsto x + 9x^2 - 4$. Notons $P(X) = 9X^2 + X - 4$ le polynôme correspondant.
Ce polynôme de degré 2 admet pour discriminant : $\Delta = 1 - 4 \times (-4) \times 9 = 1 + 144 = 145$.
Ainsi, $P$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{145}}{18} > 0 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{145}}{18} < 0$$

En effet, $\sqrt{145} > \sqrt{144} = 12$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } u_1 \ = \ \frac{-1+\sqrt{145}}{18}.}$$

- Par définition, $u_2$ est l'unique solution strictement positive de l'équation $f_2(x) = 0$ où $f_2$ est la fonction $f_2 : x \mapsto x^2 + 9x^2 - 4$. Notons $Q(X) = 10X^2 - 4$ le polynôme correspondant.
On remarque :

$$Q(X) = (\sqrt{10}X)^2 - 2^2 = (\sqrt{10}\,X - 2)\,(\sqrt{10}\,X + 2)$$

Ainsi, $Q$ a pour racines :

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{10}} > 0 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-2}{\sqrt{10}} < 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } u_2 \ = \ \frac{2}{\sqrt{10}}.}$$

□

***c)*** Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons tout d'abord :
  - × $f_n(0) \ = \ -4 < 0$,
  - × $f_n(u_n) \ = \ 0$,
  - × $f_n\left(\frac{2}{3}\right) \ = \ \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \ = \ \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$.

  On a donc : $f_n(0) \ < \ f_n(u_n) \ < \ f_n\left(\frac{2}{3}\right)$.

- Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $f_n^{-1} : [-1, +\infty[ \to [0, +\infty[$ est strictement croissante. En appliquant ${f_n}^{-1}$ de part et d'autre de l'inégalité, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} {f_n}^{-1}\big(f_n(0)\big) & < & {f_n}^{-1}(0) & < & {f_n}^{-1}\big(f_n\left(\frac{2}{3}\right)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & < & u_n & < & \frac{2}{3} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[.}$$

□

***2. a)*** Montrer que, pour tout $x$ élément de $]0,1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in ]0,1[$.

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= (x^{n+1} + 9x^2 - 4) - (x^n + 9x^2 - 4) = x^{n+1} + \cancel{9x^2} - \cancel{4} - x^n - \cancel{9x^2} + \cancel{4} \\ &= x^{n+1} - x^n = x^n\,(x-1) \end{aligned}$$

Or :
× comme $0 < x < 1$ alors $x - 1 < 0$.
× comme $0 < x < 1$, on obtient de plus : $x^n > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in ]0,1[,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0.}$$

□

***b)*** En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite $(u_n)$.

*Démonstration.*
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***1.c*** :

$$0 < u_{n+1} < \frac{2}{3} < 1$$

- En appliquant la formule de la question précédente en $x = u_{n+1} \in ]0,1[$, on obtient :

$$f_n(u_{n+1}) > \underbrace{f_{n+1}(u_{n+1})}_{=\,0 \text{ (par définition)}}$$

$$\boxed{f_n(u_{n+1}) > 0}$$

- Or $f_n(u_n) = 0$. On en déduit : $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$.
Par application de la fonction $f_n^{-1}$, strictement croissante sur $[-1, +\infty[$, on obtient : $u_{n+1} > u_n$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

**Commentaire**

- Cet exercice consiste en l'étude de la suite $(u_n)$. On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite $(u_n)$ mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n$ est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$

  On comprend alors que l'étude de $(u_n)$ va passer par l'étude des propriétés de la fonction $f_n$.
- De cette définition, on tire la propriété : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ f_m(u_m) = 0}$.
  Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite $(v_n)$.
  On l'utilise dans cette question à la fois pour $m = n$ et pour $m = n + 1$.
- Comme la suite $(u_n)$ est définie de manière implicite, on n'étudie pas la monotonie de $(u_n)$ à l'aide de la différence $u_{n+1} - u_n$. Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :

  $$f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$$

  et de conclure : $u_{n+1} > u_n$ à l'aide d'une propriété de $f_n$. □

***c)*** Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.

*Démonstration.*
D'après les questions précédentes, la suite $(u_n)$ est :
× croissante,
× majorée par $\frac{2}{3}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est convergente et que sa limite } \ell \text{ est telle que : } 0 \leqslant \ell \leqslant \frac{2}{3}.}$$ □

***3. a)*** Déterminer la limite de ${u_n}^n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

*Démonstration.*
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***1.c)*** : $0 \ < \ u_n \ < \ \frac{2}{3}$.
  La fonction élévation à la puissance $n$ étant strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit :
  $$0 \ < \ {u_n}^n \ < \ \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
- Or :
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$,
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (car $\frac{2}{3} \in \,]-1, 1[$).

$$\boxed{\text{Ainsi, par le théorème d'encadrement, la suite } ({u_n}^n) \text{ est convergente et de limite } 0.}$$ □

***b)*** Donner enfin la valeur de $\ell$.

*Démonstration.*
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de $u_n$ : $f_n(u_n) = 0$. Ainsi : ${u_n}^n + 9\ {u_n}^2 - 4 = 0$ ou encore :
  $$9\,{u_n}^2 = 4 - {u_n}^n$$
- Or :
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} 9\,u_n^2 = 9\,\ell^2$ car $(u_n)$ converge vers $\ell$.
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 - {u_n}^n = 4$ car $({u_n}^n)$ converge vers $0$.

  On en déduit : $9\,\ell^2 = 4$. Enfin :
  $$\begin{aligned} 9\,\ell^2 = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad \ell^2 = \frac{4}{9} \\ &\Leftrightarrow \quad \ell = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \quad \texttt{OU} \quad \ell = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Comme } \ell \geqslant 0, \text{ on en déduit que } (u_n) \text{ converge vers } \ell = \frac{2}{3}.}$$

**Commentaire**

C'est encore une fois la propriété de définition des termes de la suite $(u_n)$ qui est utilisée ici ($\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(u_n) = 0$). On insiste sur le fait que cette propriété est fondamentale pour l'étude de la suite implicite $(u_n)$.

□

*4.* Montrer que la série de terme général $\dfrac{2}{3} - u_n$ est convergente.

*Démonstration.*

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f_n(u_n) = 0$, on a :

$$u_n{}^n = 4 - 9\,u_n{}^2 = (2-3u_n)(2+3u_n) = 3\left(\frac{2}{3} - u_n\right)(2+3u_n)$$

On en déduit :

$$\frac{2}{3} - u_n = \frac{1}{3}\,\frac{u_n{}^n}{2+3u_n}$$

- D'après la question ***3.a)*** : $0 \leqslant u_n{}^n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

D'autre part, comme $u_n \geqslant 0$ alors $2 + 3u_n \geqslant 2$ et ainsi : $0 \leqslant \dfrac{1}{2+3u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
On en déduit, en multipliant ces inégalités membre à membre :

$$0 \leqslant \underbrace{\frac{1}{3}\,\frac{u_n^n}{2+3u_n}}_{=\ \frac{2}{3} - u_n} \leqslant \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

- On a alors :
  - × $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \dfrac{2}{3} - u_n \leqslant \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
  - × la série $\sum \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\dfrac{2}{3} \in ]-1,1[$. Elle est donc convergente et $\sum \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ aussi.

    *(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par* $\dfrac{1}{6} \neq 0$*)*

> Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \left(\dfrac{2}{3} - u_n\right)$ est convergente.

> **Commentaire**
>
> On utilise encore et toujours, en début de question, la propriété de définition des termes de la suite $(u_n)$, à savoir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = 0$.

□