
DM1 vA

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

1. **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n .
b) Calculer u_1 et u_2 .
c) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.
2. **a)** Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n) .
c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. **a)** Déterminer la limite de u_n^n lorsque n tend vers $+\infty$.
b) Donner enfin la valeur de ℓ .
4. Montrer que la série de terme général $\frac{2}{3} - u_n$ est convergente.