

## DM2 (optionnel)

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point  $O$  d'abscisse 0.

Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point  $O$ .

Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse  $0, 1, \dots, n$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $X_n$  l'abscisse de ce point à l'instant  $n$  (on a donc  $X_0 = 0$ ).

On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_n$  est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. a) Déterminer, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la loi de  $X_n$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- L'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi  $n + 1$  issues numérotées de 0 à  $n$ .
- La v.a.r.  $X$  correspond au numéro obtenu lors de cette expérience.

On en déduit :  $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ .

□

b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $X_n$  possède une espérance et une variance, puis déterminer  $\mathbb{E}(X_n)$  et  $\mathbb{V}(X_n)$ .

*Démonstration.*

La v.a.r.  $X_n$  suit une loi usuelle. On en déduit qu'elle admet une espérance et une variance.

De plus :  $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{2}$  et  $\mathbb{V}(X_n) = \frac{((n+1)-1)((n+1)+1)}{12} = \frac{n(n+2)}{12}$ .

□

2. On note  $Y$  le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que  $Y$  est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

a) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, exprimer l'événement  $[Y = n]$  à l'aide des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

L'événement  $[Y = n]$  est réalisé si et seulement si le premier retour à l'origine a lieu à l'instant  $n$ . Autrement dit, si le mobile :

- × ne se trouve pas au point d'abscisse 0 à l'instant 1,
- × ne se trouve pas au point d'abscisse 0 à l'instant 2,
- × ...
- × ne se trouve pas au point d'abscisse 0 à l'instant  $n - 1$ ,
- × se trouve au point d'abscisse 0 à l'instant  $n$ .

Ainsi :  $[Y = n] = \overline{[X_1 = 0]} \cap \overline{[X_2 = 0]} \cap \dots \cap \overline{[X_{n-1} = 0]} \cap [X_n = 0]$ .

$[Y = n] = \left( \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{[X_i = 0]} \right) \cap [X_n = 0]$

□

b) En déduire que la loi de  $Y$  est définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Y = n]) = \frac{1}{n(n+1)}$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Y = n]) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} [X_i = 0]\right) \cap [X_n = 0]\right) \\
 &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_i = 0])\right) \times \mathbb{P}([X_n = 0]) && \text{(car } (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite de v.a.r. indépendantes)} \\
 &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \mathbb{P}([X_i = 0])\right)\right) \times \mathbb{P}([X_n = 0]) \\
 &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{i+1}\right)\right) \times \frac{1}{n+1} && \text{(car pour tout } i \in \mathbb{N}^*, X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([0, i])) \\
 &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1}\right) \times \frac{1}{n+1} \\
 &= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{3} \times \dots \times \frac{n-2}{\cancel{n-1}} \times \frac{\cancel{n-1}}{n} \times \frac{1}{n+1} && \text{(par télescopage)} \\
 &= \frac{1}{n(n+1)}
 \end{aligned}$$

On a bien :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Y = n]) = \frac{1}{n(n+1)}$ .

**Commentaire**

On est confronté dans cette question à un produit télescopique. Présentons ici les différentes étapes permettant ce type de simplification :

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} i}{\prod_{i=1}^{n-1} (i+1)} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} i}{\prod_{i=2}^n i} = \frac{1 \times \prod_{i=2}^{n-1} i}{\prod_{i=2}^{n-1} i \times n} = \frac{1}{n}$$

□

c) Vérifier par le calcul que l'on a :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = n]) = 1$ .

*Démonstration.*

• Remarquons tout d'abord que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

- Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . En sommant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \mathbb{P}([Y = n]) &= \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \quad (\text{par sommation télescopique}) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

On en déduit que la série  $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}([Y = n])$  est convergente et que sa somme vaut 1. □

- d) La variable aléatoire  $Y$  admet-elle une espérance ?

*Démonstration.*

- La v.a.r.  $Y$  admet une espérance si et seulement si la série  $\sum_{n \geq 1} n \mathbb{P}([Y = n])$  est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- On a alors :

×  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \mathbb{P}([Y = n]) \geq 0$  et  $\frac{1}{n} \geq 0$

×  $n \mathbb{P}([Y = n]) = \cancel{n} \frac{1}{\cancel{n}(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

- × La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente car c'est une série de Riemann d'exposant 1 ( $1 \not> 1$ ).

Ainsi, d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} n \mathbb{P}([Y = n])$  est divergente.

La v.a.r.  $Y$  n'admet pas d'espérance. □

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel  $k$  non nul, on a :  $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ .

*Démonstration.*

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

- Soit  $t \in [k, k+1]$ .

Comme  $k \leq t \leq k+1$

alors  $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{k+1}$  (car la fonction inverse est décroissante sur  $]0, +\infty[$ )

- La fonction inverse est continue sur le segment  $[k, k+1]$ .

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissante ( $k \leq k+1$ ) :

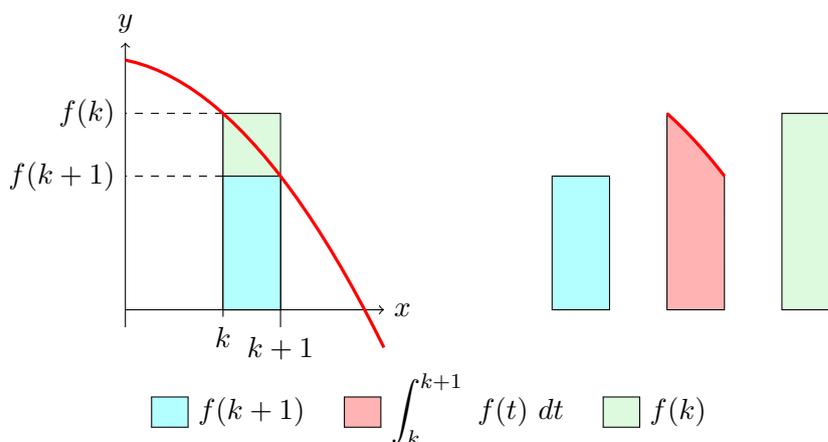
$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt &\geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ ((k+1) - k) \frac{1}{k} & \quad [ \ln(t) ]_k^{k+1} \quad \quad ((k+1) - k) \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ .

**Culture : représentation graphique associée à une comparaison séries / intégrales**

Cette démonstration illustre le procédé classique de comparaison séries / intégrales.

Rappelons le schéma associé pour une fonction  $f$  continue et décroissante sur le segment  $[k, k+1]$ .



**Commentaire**

- On pouvait également raisonner à l'aide d'une inégalité de convexité classique.

La fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x)$  est concave sur  $] -1, +\infty[$ . Sa courbe représentative est donc située sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0, droite d'équation :

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$$

On en déduit :  $\forall x \in ] -1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$ .

1) Intéressons-nous tout alors à l'inégalité de gauche.

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) &\Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq -\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{k+1} \geq \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{k+1} \geq \ln\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \end{aligned}$$

Or, comme  $k+1 \geq 2 : -\frac{1}{k+1} \in ] -1, +\infty[$ .

On obtient le résultat souhaité en appliquant l'inégalité de convexité en  $x = -\frac{1}{k+1}$ .

2) Intéressons-nous maintenant à l'inégalité de droite.

$$\begin{aligned} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Or, comme  $k \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{k} \in ]0, +\infty[ \subset ] -1, +\infty[$ .

On obtient le résultat souhaité en appliquant l'inégalité de convexité en  $x = \frac{1}{k}$ .

**Commentaire**

- Il était aussi possible de démontrer ce résultat à l'aide de l'inégalité des accroissements finis. Exposons ce procédé.
- On note  $g : t \mapsto \ln(t)$ . On a :
  - ×  $g$  est dérivable sur  $[k, k + 1]$ ,
  - ×  $\forall t \in [k, k + 1], \frac{1}{k+1} \leq g'(t) \leq \frac{1}{k}$ .

On en déduit, par inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [k, k + 1]^2, \frac{1}{k+1}(y - x) \leq g(y) - g(x) \leq \frac{1}{k}$$

En appliquant cette inégalité à  $y = k + 1$  et  $x = k$ , on obtient :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

□

b) En déduire :  $\forall j \geq 2, \ln(j) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}$ .

*Démonstration.*

Soit  $j \geq 2$ .

- On somme l'inégalité précédente pour  $k$  variant de 1 à  $j - 1$ . On obtient :

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{j-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}$$

||

$$\ln((j-1)+1) - \ln(1)$$

L'inégalité de droite fournit :  $\ln(j) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}$ .

- Par ailleurs :

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^j \frac{1}{k} = -1 + \left( \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{j}$$

L'inégalité de gauche fournit alors :

$$-1 + \left( \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{j} \leq \ln(j)$$

On obtient bien :  $\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}$ .

□

c) Conclure alors :  $\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(j)$ .

*Démonstration.*

Soit  $j \geq 2$ .

- En divisant par  $\ln(j) > 0$  de part et d'autre de l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \frac{\ln(j)}{\ln(j)} & \leq & \frac{\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}}{\ln(j)} \leq & \frac{\ln(j) + 1 - \frac{1}{j}}{\ln(j)} \\ \parallel & & & \parallel \\ & & & 1 + \frac{1}{\ln(j)} - \frac{1}{j \ln(j)} \end{array}$$

- Or :

$$\times 1 \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 1$$

$$\times 1 + \frac{1}{\ln(j)} - \frac{1}{j \ln(j)} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi, par théorème d'encadrement :  $\frac{\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}}{\ln(j)} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 1$ .

On en conclut :  $\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(j)$ .

□

4. On note  $Z$  le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que  $Z$  est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

a) Déterminer pour tout  $i \geq j$ , la probabilité  $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j])$ .

*Démonstration.*

Soit  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $i \geq j$ .

- Remarquons tout d'abord :

$$[Y = i] \cap [Z = j] = \emptyset$$

En effet, l'événement  $[Y = i] \cap [Z = j]$  est réalisé si et seulement si le rang du premier retour à l'origine est  $i$  et le rang du deuxième retour est  $j$ .

Cela n'est pas possible car on a supposé  $i \geq j$ .

- On en déduit :

$$\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j]) = \frac{\mathbb{P}([Y = i] \cap [Z = j])}{\mathbb{P}([Y = i])} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}([Y = i])} = \frac{0}{\mathbb{P}([Y = i])} = 0$$

Ainsi, pour tout  $i \geq j$  :  $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j]) = 0$ .

**Commentaire**

- On pouvait raisonner de manière plus directe en adoptant la rédaction suivante.  
Si l'événement  $[Y = i]$  est réalisé, c'est que le premier retour à l'origine a eu lieu à l'instant  $i$ . Dans ce cas, le deuxième retour à l'origine ne peut avoir eu lieu à un instant  $j \leq i$ .  
On en déduit :  $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j]) = 0$ .
- Revenons sur cette rédaction afin de comprendre ce que signifie raisonner conditionnellement à la réalisation d'un événement.
  - L'univers  $\Omega$  (ensemble des résultats possibles de l'expérience) est constitué initialement de tous les  $\infty$ -déplacements du mobile. Faire l'hypothèse que l'événement  $[Y = i]$  est réalisé revient à considérer un nouvel univers  $\Omega'$  qui ne serait constitué que des  $\infty$ -déplacements qui réalisent l'événement  $[Y = i]$ .
  - Déterminer la probabilité de l'événement  $[Z = j]$  conditionnellement à la réalisation de l'événement  $[Y = i]$ , c'est alors déterminer la probabilité de l'événement  $[Z = j]$  sur l'espace probabilisé  $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P})$ .
- Raisonner conditionnellement à la réalisation d'un événement, ce n'est **en aucun cas**, considérer un événement conditionné par un autre. La raison en est simple : un tel objet **n'existe pas** en mathématiques !

L'écriture  ${}_{[Y=i]}[Z = j]$  est donc une **horreur** qu'il faut proscrire de toute rédaction.

□

b) Établir :

$$\forall i \leq j - 1, \quad \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j]) = \frac{i + 1}{j(j + 1)}$$

*Démonstration.*

Soit  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $i \leq j - 1$ .

- L'événement  $[Y = i] \cap [Z = j]$  est réalisé si et seulement si le rang du premier retour à l'origine est  $i$  et le rang du deuxième retour est  $j \geq i + 1$ .

Autrement dit, si le mobile :

- × ne se trouve pas au point d'abscisse 0 à l'instant 1,
- × ...
- × ne se trouve pas au point d'abscisse 0 à l'instant  $i - 1$ ,
- × se trouve au point d'abscisse 0 à l'instant  $i$ .
- × ne se trouve pas au point d'abscisse 0 à l'instant  $i + 1$ ,
- × ...
- × ne se trouve pas au point d'abscisse 0 à l'instant  $j - 1$ ,
- × se trouve au point d'abscisse 0 à l'instant  $j$ .

$$[Y = i] \cap [Z = j] = \left( \bigcap_{k=1}^{i-1} \overline{[X_k = 0]} \right) \cap [X_i = 0] \cap \left( \bigcap_{k=i+1}^{j-1} \overline{[X_k = 0]} \right) \cap [X_j = 0]$$

**Commentaire**

Il est à noter que la décomposition de l'événement  $[Y = i] \cap [Z = j]$  démontre la bonne compréhension et permet donc, à elle seule, d'obtenir la totalité des points alloués sur cette étape.

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}([Y = i] \cap [Z = j]) \\
 = & \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{i-1} \overline{[X_k = 0]}\right) \cap [X_i = 0] \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1} \overline{[X_k = 0]}\right) \cap [X_j = 0]\right) \\
 = & \left(\prod_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}(\overline{[X_k = 0]})\right) \times \mathbb{P}([X_i = 0]) \times \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} \mathbb{P}(\overline{[X_k = 0]})\right) \times \mathbb{P}([X_j = 0]) && \text{(car } (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite de v.a.r. indépendantes)} \\
 = & \mathbb{P}([Y = i]) \times \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} (1 - \mathbb{P}([X_k = 0]))\right) \times \mathbb{P}([X_j = 0]) && \text{(d'après la question 2.b)} \\
 = & \mathbb{P}([Y = i]) \times \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\right) \times \frac{1}{j+1} && \text{(pour tout } k \in \mathbb{N}^*, X_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, k \rrbracket)) \\
 = & \mathbb{P}([Y = i]) \times \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} \frac{k}{k+1}\right) \times \frac{1}{j+1} \\
 = & \mathbb{P}([Y = i]) \times \frac{i+1}{i+2} \times \frac{i+2}{i+3} \times \dots \times \frac{j-2}{j-1} \times \frac{j-1}{j} \times \frac{1}{j+1} && \text{(par télescopage)} \\
 = & \mathbb{P}([Y = i]) \times \frac{i+1}{j(j+1)}
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}([Y = i] \cap [Z = j]) = \mathbb{P}([Y = i]) \times \frac{i+1}{j(j+1)}$$

- On en déduit :

$$\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j]) = \frac{\mathbb{P}([Y = i] \cap [Z = j])}{\mathbb{P}([Y = i])} = \frac{\cancel{\mathbb{P}([Y = i])} \times \frac{i+1}{j(j+1)}}{\cancel{\mathbb{P}([Y = i])}}$$

On a bien :  $\forall i \leq j - 1, \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j]) = \frac{i+1}{j(j+1)}$ .

□

- c) Écrire, pour tout entier naturel  $j$  supérieur ou égal à 2, la probabilité  $\mathbb{P}([Z = j])$  comme une somme finie.

*Démonstration.*

La famille  $([Y = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$  est un système complet d'événements.

Soit  $j \geq 2$ . Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = j]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = i] \cap [Z = j]) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = i]) \times \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j]) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \leq j-1}}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = i]) \times \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j]) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \geq j}}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = i]) \times \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j]) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i(i+1)} \frac{i+1}{j(j+1)} \quad (d'après les questions \mathbf{2.b) et 4.b)}) \\ &= \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i} \end{aligned}$$

Pour tout  $j \geq 2$  :  $\mathbb{P}([Z = j]) = \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i}$ .

□

- d) La variable aléatoire  $Z$  possède-t-elle une espérance ?

*Démonstration.*

- Notons tout d'abord :  $Z(\Omega) = [2, +\infty[$ .  
En effet, le mobile peut revenir pour la première fois à l'origine au rang 2 ou aux rangs suivants.
- La v.a.r.  $Z$  admet une espérance si et seulement si la série  $\sum_{j \geq 2} j \mathbb{P}([Z = j])$  est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- On a alors :

×  $\forall j \geq 2, j \mathbb{P}([Z = j]) \geq 0$  et  $\frac{\ln(j)}{j} \geq 0$

×  $j \mathbb{P}([Z = j]) = j \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} j \frac{1}{j^2} \ln(j) = \frac{\ln(j)}{j}$

× La série  $\sum_{j \geq 2} \frac{\ln(j)}{j}$  est divergente (on le démontre en dessous).

Ainsi, d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série  $\sum_{j \geq 2} j \mathbb{P}([Z = j])$  est divergente.

La v.a.r.  $Z$  n'admet pas d'espérance.

- Il reste à démontrer que la série  $\sum_{j \geq 2} \frac{\ln(j)}{j}$  est divergente.

$$\times \forall j \geq 2, 0 \leq \frac{1}{j} \leq \frac{\ln(j)}{j}$$

- × La série  $\sum_{j \geq 2} \frac{1}{j}$  est divergente car c'est une série de Riemann d'exposant 1 ( $1 \not> 1$ ).

Ainsi, d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs,  
la série  $\sum_{j \geq 2} \frac{\ln(j)}{j}$  est divergente.

□

### 5. Informatique.

On rappelle qu'en **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, 'uin', a, b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme à valeurs dans  $[[a, b]]$ .

- a) Écrire des commandes **Scilab** calculant et affichant la valeur de l'abscisse du mobile après son  $n^{\text{ème}}$  déplacement lorsque la valeur de  $n$  est entrée au clavier par l'utilisateur.

*Démonstration.*

Le  $n^{\text{ème}}$  déplacement du mobile est régi par un choix uniforme d'un élément de l'ensemble  $[[0, n]]$ .  
On en déduit le programme suivant.

```

1  n = input('Prière d'entrer une valeur entière')
2  x = grand(1, 1, 'uin', 0, n)

```

□

- b) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette d'afficher dans cet ordre les valeurs prises par les variables aléatoires  $Y$  et  $Z$ .

```

1  n = 0
2  a = 0
3  while a < 2
4      n = n + 1
5      if grand(1, 1, 'uin', 0, n) == 0 then
6          a = a + 1
7          if a == 1 then
8              y = n
9          end
10         end
11     end
12     disp(..., 'y =')
13     disp(..., 'z =')

```

*Démonstration.*

Commençons par commenter les différentes lignes de ce programme.

- Initialement, la variable  $n$  qui stocke l'instant de déplacement du mobile est affectée à 0.

1 n = 0

De même, la variable  $a$  qui stocke le nombre de retours en l'origine est initialisée à 0.

2 a = 0

- On entra alors dans une structure itérative (boucle `while`) permettant d'effectuer des instructions tant que le mobile n'est pas revenu deux fois en l'origine.

```
3 while a < 2
```

- × À chaque tour de boucle, on met à jour l'instant de déplacement.

```
4 n = n + 1
```

- × S'ensuit alors un test permettant de vérifier si le  $n^{\text{ème}}$  déplacement est un retour à l'origine.

```
5 if grand(1, 1, 'uin', 0, n) == 0 then
```

Si c'est le cas, on commence par mettre à jour la variable comptant le nombre de retours à l'origine.

```
6 a = a + 1
```

Dans le cas où c'est le premier retour à l'origine (ce qu'on teste à l'aide d'une structure conditionnelle), on stocke dans la variable `y` le rang auquel s'est effectué ce premier déplacement.

```
7 if a == 1 then
8     y = n
9 end
```

Dans le cas contraire, on est confronté au deuxième retour à l'origine. Cela provoque la sortie de la boucle.

- En fin de boucle, la variable `y` contient le rang du premier retour à l'origine. Le rang du deuxième retour à l'origine est obtenu par l'instant de déplacement `n` qui a permis d'obtenir ce deuxième retour.

```
12 disp(y, 'y =')
13 disp(n, 'z =')
```

### Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu dans cette question, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
- On doit s'interroger sur la terminaison de la boucle `while`. A priori, il n'est pas clair que cette boucle se termine : on peut théoriquement obtenir une suite infinie de déplacements ne contenant aucun ou un seul retour à l'origine. Cependant, on peut démontrer que l'événement « le mobile revient plus de deux fois à l'origine » se produit avec probabilité 1. Ainsi, la boucle termine presque sûrement.
- On peut même démontrer que l'événement  $A$  : « le mobile revient une infinité de fois en l'origine » se produit presque sûrement. Pour cela, on l'écrit sous la forme :

$$A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=i}^{+\infty} [X_j = 0]$$

et on détermine  $\mathbb{P}(A)$  à l'aide du théorème de la limite monotone (en remarquant notamment que la suite d'événements  $(C_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  de terme général  $C_i = \bigcup_{j=i}^{+\infty} [X_j = 0]$  est décroissante). □