

---

## DM2 (optionnel)

---

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point  $O$  d'abscisse 0.

Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point  $O$ .

Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse  $0, 1, \dots, n$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $X_n$  l'abscisse de ce point à l'instant  $n$  (on a donc  $X_0 = 0$ ).

On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_n$  est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. a) Déterminer, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la loi de  $X_n$ .

b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $X_n$  possède une espérance et une variance, puis déterminer  $\mathbb{E}(X_n)$  et  $\mathbb{V}(X_n)$ .

2. On note  $Y$  le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que  $Y$  est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

a) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, exprimer l'événement  $[Y = n]$  à l'aide des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

b) En déduire que la loi de  $Y$  est définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Y = n]) = \frac{1}{n(n+1)}$ .

c) Vérifier par le calcul que l'on a :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = n]) = 1$ .

d) La variable aléatoire  $Y$  admet-elle une espérance ?

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel  $k$  non nul, on a :  $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ .

b) En déduire :  $\forall j \geq 2, \ln(j) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}$ .

c) Conclure alors :  $\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(j)$ .

4. On note  $Z$  le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que  $Z$  est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

a) Déterminer pour tout  $i \geq j$ , la probabilité  $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j])$ .

b) Établir :

$$\forall i \leq j-1, \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j]) = \frac{i+1}{j(j+1)}$$

c) Écrire, pour tout entier naturel  $j$  supérieur ou égal à 2, la probabilité  $\mathbb{P}([Z = j])$  comme une somme finie.

d) La variable aléatoire  $Z$  possède-t-elle une espérance ?

5. Informatique

On rappelle qu'en **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, 'uin ', a, b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme à valeurs dans  $[[a, b]]$ .

- a) Écrire des commandes **Scilab** calculant et affichant la valeur de l'abscisse du mobile après son  $n^{\text{ème}}$  déplacement lorsque la valeur de  $n$  est entrée au clavier par l'utilisateur.
- b) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette d'afficher dans cet ordre les valeurs prises par les variables aléatoires  $Y$  et  $Z$ .

```
1  n = 0
2  a = 0
3  while a < 2
4      n = n + 1
5      if grand(1, 1, 'uin', 0, n) == 0 then
6          a = a + 1
7          if a == 1 then
8              y = n
9          end
10         end
11     end
12     disp(..., 'y =')
13     disp(..., 'z =')
```