DM2

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) (i) Démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X = k]) \ = \ \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- On commence par remarquer :

$$\begin{aligned} [X > k-1] &= [X \geqslant k] && \textit{(car } X \textit{ est à valeurs entières)} \\ &= [X = k] \cup [X > k] \end{aligned}$$

- Comme les événements $[X = k]$ et $[X > k]$ sont incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}\big([X > k-1]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([X = k]\big) + \mathbb{P}\big([X > k]\big)$$

$$\boxed{\text{D'où : } \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}\big([X = k]\big) = \mathbb{P}\big([X > k-1]\big) - \mathbb{P}\big([X > k]\big).}$$

□

(ii) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([X = k]) \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > k]) - n\, \mathbb{P}([X > n])$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k\ \mathbb{P}([X = k]) &= \sum_{k=1}^{n} k\ \mathbb{P}([X = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\ \Big(\mathbb{P}\big([X > k-1]\big) - \mathbb{P}\big([X > k]\big)\Big) && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\ \mathbb{P}\big([X > k-1]\big) - \sum_{k=1}^{n} k\ \mathbb{P}\big([X > k]\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\ \mathbb{P}\big([X > k]\big) - \sum_{k=1}^{n} k\ \mathbb{P}\big([X > k]\big) && \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\ \mathbb{P}\big([X > k]\big) - \sum_{k=1}^{n} k\ \mathbb{P}\big([X > k]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X > 0]\big) + \sum_{k=1}^{n-1} \big((\cancel{k}+1) - \cancel{k}\big)\, \mathbb{P}\big([X > i]\big) - n\ \mathbb{P}\big([X > n]\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big([X > k]\big) - n\ \mathbb{P}\big([X > n]\big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([X = k]) \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > k]) - n\, \mathbb{P}([X > n])}$$

□

b) On suppose que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbb{P}([X>k])$ est convergente. Démontrer que X admet une espérance.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big)$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient é démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{k=0}^{n} k\ \mathbb{P}\big([X=k]\big) & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big([X>k]\big) - n\ \mathbb{P}\big([X>n]\big) & \\ & \leqslant & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big([X>k]\big) & \textit{(car } n\ \mathbb{P}\big([X>n]\big) \geqslant 0\textit{)} \\ & \leqslant & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X>k]\big) & \textit{(car la série } \sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbb{P}\big([X>k]\big) \textit{ est convergente et à termes positifs))} \end{array}$$

- Ainsi la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
  - × croissante, car la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big)$ est à termes positifs,
  - × majorée par $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X>k]\big)$.

  Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ admet une espérance.}}$$

□

c) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance.
Démontrer alors que la suite $\big(n\,\mathbb{P}([X>n])\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, puis que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbb{P}([X>k])$ est convergente et enfin :

$$\mathbb{E}(X) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>k])$$

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme X est à valeurs entières :

$$[X>n] \ = \ [X \geqslant n+1] \ = \ \bigcup_{i=n+1}^{+\infty} [X=i]$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([X>n]\big) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=n+1}^{+\infty} [X=k]\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=k]\big) & \textit{(car } \big(\ [X=k]\ \big)_{k\in[\![n+1,+\infty[\![} \textit{ est une famille d'événements incompatibles)} \end{array}$$

On en déduit :

$$n\,\mathbb{P}\big([X>n]\big) \ = \ n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=k]\big) \ = \ \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}\big([X=k]\big)$$

- Soit $k \in [\![n+1, +\infty[\![$. On remarque :

$$\begin{array}{rrcl} & n & \leqslant & k \\ \text{donc} & n\,\mathbb{P}\big([X=k]\big) & \leqslant & k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big) \qquad \textit{(car } \mathbb{P}\big([X=k]\big) \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

De plus :
× la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} n\,\mathbb{P}\big([X=k]\big)$ est convergente,
× la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big)$ est convergente car X admet une espérance.

On en déduit :

$$0 \leqslant \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}\big([X=k]\big)}_{= n\,\mathbb{P}([X>n])} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big)$$

- On sait par ailleurs :
× $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$
× $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big) = 0$. En effet, comme la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big)$ est convergente, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big) = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big)$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big) & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big) - \sum\limits_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big) \\ & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big) - \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big) = 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} n\,\mathbb{P}\big([X>n]\big) = 0.}$$

Commentaire

Cette question fait intervenir un résultat classique sur les séries. Étant donnée une série $\sum u_n$ convergente, de somme notée S et dont la suite des sommes partielles est notée $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k}_{S} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{S_n} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}_{R_n}$$

La quantité $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé reste d'ordre n de la série $\sum u_n$.
La suite (R_n) ainsi construite est convergente de limite nulle. En effet :

$$R_n = S - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$$

- D'après la question ***1.a)(ii)*** :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big([X > k]\big) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}\big([X = k]\big) \quad + \quad n\, \mathbb{P}\big([X > n]\big)$$

Or :

× la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}\big([X = k]\big)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathbb{E}(X)$.

× $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, \mathbb{P}\big([X > n]\big) = 0$, d'après le point précédent.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}\big([X > k]\big) \text{ est donc convergente.}}$$

De plus :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X > k]\big) \quad = \quad \mathbb{E}(X) + 0$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X > k]\big)}$$

□

2. *Une application* : soit n et N deux entiers naturels non nuls. On dispose d'une urne qui contient N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue dans cette urne, n tirages successifs avec remise d'une boule et on note X le plus grand nombre obtenu.

a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note E_i la variable aléatoire qui donne le résultat du $i^{\text{ème}}$ tirage. Ces variables aléatoires sont indépendantes car les tirages le sont.

(i) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner, en justifiant, la loi de E_i.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- L'expérience consiste en un choix équiprobable parmi N issues numérotées de 1 à N.
- La v.a.r. E_i correspond au numéro obtenu lors de cette expérience (au $i^{\text{ème}}$ tirage)

$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } i \in [\![1, n]\!] : E_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!]).}$$

□

(ii) Exprimer la v.a.r. X en fonction des v.a.r. E_1, ..., E_n.

Démonstration.
La v.a.r. X correspond au plus grand nombre obtenu au cours des n tirages. Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la v.a.r. E_i correspond au nombre obtenu au cours du $i^{\text{ème}}$ tirage.

$$\boxed{\text{On obtient : } X = \max(E_1, \dots, E_n).}$$

□

(iii) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer :

$$\mathbb{P}([X = k]) \quad = \quad \mathbb{P}([X \leqslant k]) - \mathbb{P}([X \leqslant k-1])$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***1.a)(i)*** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X = k]\big) \quad &= \quad \mathbb{P}\big([X > k-1]\big) - \mathbb{P}\big([X > k]\big) \\
&= \quad \Big(\cancel{1} - \mathbb{P}\big([X \leqslant k-1]\big)\Big) - \Big(\cancel{1} - \mathbb{P}\big([X \leqslant k]\big)\Big) \\
&= \quad \mathbb{P}\big([X \leqslant k]\big) - \mathbb{P}\big([X \leqslant k-1]\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\big([X = k]\big) = \mathbb{P}\big([X \leqslant k]\big) - \mathbb{P}\big([X \leqslant k-1]\big)}$$

Commentaire

Plutôt que d'utiliser la question ***1.a)(ii)***, on pouvait effectuer une démonstration similaire (un peu moins rapide), en commençant par remarquer :

$$\begin{array}{rcll} [X \leqslant k] & = & [X = k] \cup [X < k] & \\ & = & [X = k] \cup [X \leqslant k-1] & \textit{(car } X \textit{ est à valeurs entières)} \end{array}$$

Comme les événements $[X = k]$ et $[X \leqslant k-1]$ sont incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}\big([X \leqslant k]\big) = \mathbb{P}\big([X = k]\big) + \mathbb{P}\big([X \leqslant k-1]\big)$$

D'où l'égalité demandée. $\square$

(iv) En déduire la loi de X.

Démonstration.

- Tout d'abord : $X(\Omega) \subset [\![1, N]\!]$ car, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E_i(\Omega) = [\![1, N]\!]$.

$$\boxed{X(\Omega) \subset [\![1, N]\!]}$$

- Soit $k \in [\![1, N]\!]$. Commençons par déterminer $\mathbb{P}\big([X \leqslant k]\big)$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([X \leqslant k]\big) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [E_i \leqslant k]\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([E_i \leqslant k]\big) & \textit{(car les v.a.r. } E_1, \ldots, E_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \Big(\mathbb{P}\big([E_1 \leqslant k]\big)\Big)^n & \textit{(car les v.a.r. } E_1, \ldots, E_n \textit{ ont même loi)} \end{array}$$

- Or, comme E_1 est à valeurs dans $[\![1, N]\!]$:

$$[E_1 \leqslant k] = \bigcup_{j=1}^{k} [E_1 = j]$$

Comme les événements $[E_1 = 1]$, $\ldots$, $[E_1 = k]$ sont incompatibles, on obtient :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([E_1 \leqslant k]\big) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{j=1}^{k} [E_1 = j]\right) & \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{k} \mathbb{P}\big([E_1 = j]\big) & \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{1}{N} & \textit{(car } E_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])\textit{)} \\ & = & \dfrac{k}{N} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient alors : } \forall k \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}\big([X \leqslant k]\big) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n.}$$

- Soit $k \in [\![1, N]\!]$. D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}\big([X = k]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([X \leqslant k]\big) - \mathbb{P}\big([X \leqslant k-1]\big)$$

En effectuant exactement le même raisonnement que dans le point précédent, on obtient :

$$\mathbb{P}\big([X \leqslant k-1]\big) \ = \ \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}\big([X = k]\big) \ = \ \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n.}$$

□

b) À l'aide des questions précédentes, déterminer l'espérance de X en fonction de n et N.

Démonstration.

- La v.a.r. X est finie. Elle admet donc une espérance.
- D'après la question ***1.c)***, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \mathbb{P}\big([X > k]\big)$ est alors convergente et :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(X) & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X > k]\big) & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([X > k]\big) & \textit{(car } X(\Omega) \subset [\![1, N]\!]\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} \big(1 - \mathbb{P}\big([X \leqslant k]\big)\big) & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left(1 - \left(\dfrac{k}{N}\right)^n\right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & N - \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n}$$

Commentaire

On pouvait également calculer $\mathbb{E}(X)$ à l'aide de la définition de l'espérance, ce qui fournissait une autre expression :

$$\mathbb{E}(X) \ = \ \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}\big([X = k]\big) \ = \ \sum_{k=1}^{N} k \left(\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n\right)$$

Les deux expressions étaient a priori tout autant valides au vu de l'énoncé de cette question.

□