DM2

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) (i) Démontrer :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X = k]) \ = \ \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

(ii) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}([X = k]) \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > k]) - n\,\mathbb{P}([X > n])$$

b) On suppose que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \mathbb{P}([X > k])$ est convergente. Démontrer que X admet une espérance.

c) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance.
Démontrer alors que la suite $\big(n\,\mathbb{P}([X > n])\big)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, puis que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \mathbb{P}([X > k])$ est convergente et enfin :
$$\mathbb{E}(X) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k])$$

2. *Une application* : soit n et N deux entiers naturels non nuls. On dispose d'une urne qui contient N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue dans cette urne, n tirages successifs avec remise d'une boule et on note X le plus grand nombre obtenu.

a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note E_i la variable aléatoire qui donne le résultat du $i^{\text{ème}}$ tirage. Ces variables aléatoires sont indépendantes car les tirages le sont.

(i) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner, en justifiant, la loi de E_i.

(ii) Exprimer la v.a.r. X en fonction des v.a.r. E_1, …, E_n.

(iii) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer :
$$\mathbb{P}([X = k]) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant k]) - \mathbb{P}([X \leqslant k-1])$$

(iv) En déduire la loi de X.

b) À l'aide des questions précédentes, déterminer l'espérance de X en fonction de n et N.