DM2 (version B)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} \times u_n \end{cases}$$

1. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n > 0$.

- **Initialisation** :
  D'après l'énoncé : $u_0 = 1 > 0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} > 0$).
  Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$. En multipliant par $\dfrac{2n+2}{2n+5} > 0$, on obtient :

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} \times u_n > 0$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.}$$

□

2. Écrire une fonction **Scilab** ayant pour argument n et renvoyant $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

Démonstration.

```
function S = somme(n)
    S = 0
    u = 1
    S = S + u
    for i = 1:n-1
        u = (2⋆i+2) / (2⋆i+5) ⋆ u
        S = S + u
    end
endfunction
```

- **Début du programme**
  Commençons par préciser la structure de la fonction :
  - cette fonction se nomme somme,
  - elle prend en paramètre la variable **n**,
  - elle admet pour variable de sortie la variable **S**.

```
function S = somme(n)
```

On initialise alors deux variables :

× la variable S destinée à calculer les valeurs successives de S_n par ajout sucessif du contenu de la variable u.
Cette variable S est initialisée à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

```
2    S = 0
```

× la variable u destinée à recevoir les valeurs sucessives de u_n.
Cette variable u est initialisée à 1, qui n'est autre que la valeur de u_0.

```
3    u = 1
```

× on fait alors une première mise à jour de la variable S pour qu'elle contienne $\sum\limits_{k=0}^{0} u_k = u_0$.

```
4    S = S + u
```

- **Structure itérative**
Les lignes 5 à 8 consistent à mettre à jour les variables S et u.
Pour cela, on utilise une structure conditionnelle (boucle for) :

```
5    for i = 1:n-1
6        u = (2*i+2) / (2*i+5) * u
7        S = S + u
8    end
```

L'idée est la suivante. Supposons qu'au début d'un certain tour de boucle $\mathtt{i} \in [\![1, \mathtt{n}-1]\!]$:

× la variable u contient la valeur u_i.

× la variable S contient la valeur $\sum\limits_{k=0}^{i} u_k$,

On effectue alors la mise à jour de la variable u :

```
6        u = (2*i+2) / (2*i+5) * u
```

Étant donnée le contenu de u au début de cette boucle, la variable u va contenir u_{i+1} à l'issue de cette affectation.

On effectue alors la mise à jour de la variable S :

```
7        S = S + u
```

Étant données le contenu de S et la nouvelle valeur de u, la variable S va contenir :

$$\left(\sum_{k=0}^{i} u_k\right) + u_{i+1} = \sum_{k=0}^{i+1} u_k$$

à l'issue de cette affectation.

Finalement, on en conclut qu'au début de la $(i+1)^{\text{ème}}$ boulce, les variables u et S contiennent respectivement u_{i+1} et $\sum\limits_{k=0}^{i+1} u_k$.

- **Fin du programme**
La propriété évoquée ci-dessus permet de conclure qu'à l'issue de la boucle (à l'issue du $\mathtt{n}^{\text{ème}}$ tour de boucle), les variables u contiennent respectivement $u_{\mathtt{n}}$ et $\sum\limits_{k=0}^{\mathtt{n}} u_k$.

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un programme **Scilab** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
- Afin de démontrer la correction de ce programme, nous avons exhibé un **invariant de boucle**. En démontrant que cette propriété est vraie avant chaque tour de boucle, on peut conclure quant au contenu des variables à l'issue de la boucle.

□

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{(n+1)^\alpha\ u_{n+1}}{n^\alpha\ u_n}$$

2. a) Rappeler le développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après le cours, on a : } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).}$$

□

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(v_n) = (\alpha+1)\ \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{5}{2n}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons tout d'abord, par définition :

$$v_n = \frac{(n+1)^\alpha\, u_{n+1}}{n^\alpha\, u_n} > 0 \qquad \textit{(car } u_n > 0 \textit{ et } u_{n+1} > 0 \textit{ d'après la question } \textbf{\textit{1.}}\textit{)}$$

- On a alors :

$$\begin{aligned}
\ln(v_n) &= \ln\left(\frac{(n+1)^\alpha\, u_{n+1}}{n^\alpha\, u_n}\right) \\
&= \ln\left((n+1)^\alpha\, u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\alpha\, u_n\right) \\
&= \ln\left((n+1)^\alpha\right) + \ln\left(u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\alpha\right) - \ln\left(u_n\right) \\
&= \alpha\ \ln(n+1) - \alpha\ \ln(n) + \ln\left(\frac{2n+2}{2n+5}\, u_n\right) - \ln\left(u_n\right) && \textit{(par définition de } u_{n+1}\textit{)} \\
&= \alpha\ \ln(n+1) - \alpha\ \ln(n) + \ln\left(\frac{2n+2}{2n+5}\right) + \cancel{\ln(u_n)} - \cancel{\ln(u_n)} \\
&= \alpha\ \ln(n+1) - \alpha\ \ln(n) + \ln(2n+2) - \ln(2n+5) \\
&= \alpha\ \ln(n+1) - \alpha\ \ln(n) + \ln\left(2(n+1)\right) - \ln(2n+5) \\
&= \alpha\ \ln(n+1) - \alpha\ \ln(n) + \ln(2) + \ln(n+1) - \ln(2n+5) \\
&= (\alpha+1)\ \ln(n+1) - \alpha\ \ln(n) - \left(\ln(2n+5) - \ln(2)\right)
\end{aligned}$$

Commentaire

Dans un but pédagogique, on a détaillé chaque étape de calcul. Toutefois, il est possible de présenter le calcul de manière plus rapide. Par exemple en écrivant dès le départ :

$$\ln(v_n) \;=\; \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} \ \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \;=\; \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \ \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \;=\; \alpha\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{2n+2}{2n+5}\right)$$

En ajoutant alors artificiellement $\ln(n) - \ln(n)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\ln(v_n) &= (\alpha+1)\ \ln(n+1) - \alpha\ \ln(n) - \ln(n) - \big(\ln(2n+5) - \ln(2) - \ln(n)\big) \\
&= (\alpha+1)\ \ln(n+1) - (\alpha+1)\ \ln(n) - \big(\ln(2n+5) - \ln(2n)\big) \\
&= (\alpha+1)\ \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{2n+5}{2n}\right) \\
&= (\alpha+1)\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(v_n) = (\alpha+1)\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right).}$$

□

c) Pour quelle valeur α_0 du réel α la série de terme général $\ln(v_n)$ est-elle convergente ?

Démonstration.

- D'après la question ***2.a)***, il existe une fonction ε définie au voisinage de 0, de limite nulle en 0, telle que, pour tout x au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) \;=\; x - \frac{x^2}{2} + x^2\ \varepsilon(x)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on peut appliquer l'égalité précédente en $x = \frac{1}{n}$.
On obtient :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \;=\; \frac{1}{n} \;-\; \frac{1}{2}\ \frac{1}{n^2} \;+\; \frac{1}{n^2}\ \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{donc} \quad (\alpha+1)\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \;=\; \frac{\alpha+1}{n} \;-\; \frac{\alpha+1}{2}\ \frac{1}{n^2} \;+\; \frac{\alpha+1}{n^2}\ \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (*)$$

De la même façon, en appliquant l'égalité en $x = \frac{5}{2n}$, on obtient :

$$\ln\left(1+\frac{5}{2n}\right) \;=\; \frac{5}{2n} \;-\; \frac{1}{2}\ \frac{25}{4\,n^2} \;+\; \frac{25}{4\,n^2}\ \varepsilon\left(\frac{5}{2n}\right)$$

$$\text{donc} \quad -\ln\left(1+\frac{5}{2n}\right) \;=\; -\frac{5}{2}\ \frac{1}{n} \;+\; \frac{25}{8}\ \frac{1}{n^2} \;-\; \frac{25}{4}\ \frac{1}{n^2}\ \varepsilon\left(\frac{5}{2n}\right) \qquad (**)$$

En sommant les égalités $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\ln(v_n) &= \left((\alpha+1) - \frac{5}{2}\right)\ \frac{1}{n} \;-\; \frac{1}{2}\ \left((\alpha+1) - \frac{25}{4}\right)\ \frac{1}{n^2} \;+\; \frac{1}{n^2}\left((\alpha+1)\ \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{25}{4}\ \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\ \frac{1}{n} \;-\; \frac{1}{2}\ \left(\alpha - \frac{21}{4}\right)\ \frac{1}{n^2} \;+\; \frac{1}{n^2}\left((\alpha+1)\ \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{25}{4}\ \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Remarquons enfin que par théorème de composition des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

et ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left((\alpha+1)\,\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{25}{4}\,\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0.$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \ln(v_n) = \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{21}{4}\right)\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

- Deux cas se présentent :
  - si $\alpha > \frac{3}{2}$, alors on a :
    - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} \geqslant 0$
    - $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n}$
    - La série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente en tant que série de Riemann d'exposant 1 ($\not> 1$).
      Il en est de même de la série $\sum \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n}$ car on ne modifie pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul.

    Ainsi, par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \ln(v_n)$ est divergente.
  - si $\alpha < \frac{3}{2}$, alors en raisonnant comme au-dessus, on démontre que la série $\sum \big(-\ln(v_n)\big)$ est divergente. Ainsi, la série $\sum \ln(v_n)$ est elle aussi divergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \alpha \neq \frac{3}{2}, \text{ la série } \sum \ln(v_n) \text{ est divergente.}}$$

  - si $\alpha = \frac{3}{2}$ alors :

$$\ln(v_n) = \cancel{\left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n}} + \frac{15}{8}\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

    On a :
    - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{15}{8}\frac{1}{n^2} \geqslant 0$
    - $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{15}{8}\frac{1}{n^2}$
    - La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).
      Il en est de même de la série $\sum \frac{15}{8}\frac{1}{n^2}$.

    Ainsi, par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \ln(v_n)$ est convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \alpha = \frac{3}{2}, \text{ la série } \sum \ln(v_n) \text{ est convergente.}}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la série } \sum \ln(v_n) \text{ est convergente seulement si } \alpha = \frac{3}{2}.}$$

□

On se place maintenant dans le cas où $\alpha = \alpha_0$ (valeur obenue en ***2.c)***).

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(v_k)$ sans signe $\sum$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll}
\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(v_k) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{(k+1)^{\alpha_0}\ u_{k+1}}{k^{\alpha_0}\ u_k}\right) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln\Big((k+1)^{\alpha_0}\ u_{k+1}\Big) - \ln\Big(k^{\alpha_0}\ u_k\Big)\right) & \\
& = & \ln\Big((n+1)^{\alpha_0}\ u_{n+1}\Big) - \ln\Big(1^{\alpha_0}\ u_1\Big) & \textit{(par sommation télescopique)} \\
& = & \ln\Big((n+1)^{\alpha_0}\ u_{n+1}\Big) - \ln(u_1) & \textit{(car } 1^{\alpha_0} = 1\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(v_k) = \ln\Big((n+1)^{\alpha_0}\ u_{n+1}\Big) - \ln(u_1).}$$

□

b) En déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^{\alpha_0}}$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.c)***, la série $\sum \ln(v_n)$ est convergente. Notons ℓ sa somme.
  En particulier, on a :
  $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \ln(v_k) = \ell$$

Commentaire

De manière générale, si une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ, il en est de même des suites $(w_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ (qui n'est autre que la suite (w_n) a un décalage d'indice près), $(w_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (qui n'est autre que la suite (w_n) après suppression de son premier terme), $(w_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ (qui n'est autre que la suite (w_n) après suppression de ses deux premiers termes).

- Or, d'après la question précédente, pour $n \geqslant 2$:
  $$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(v_k) \ = \ \ln\left(n^{\alpha_0}\ u_n\right) - \ln(u_1) \qquad \textit{(car } n-1 \geqslant 1\textit{)}$$
  On obtient alors :
  $$\begin{array}{rcl}
  \ln\left(n^{\alpha_0}\ u_n\right) & = & \left(\ln\left(n^{\alpha_0}\ u_n\right) - \ln(u_1)\right) + \ln(u_1) \\
  & = & \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} \ln(v_k)\right) + \ln(u_1) \\
  & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \ell + \ln(u_1)
  \end{array}$$

- Par composition de limites, on a alors :
  $$\begin{array}{rcll}
  n^{\alpha_0}\ u_n & = & \exp\left(\ln\left(n^{\alpha_0}\ u_n\right)\right) & \\
  & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \exp\left(\ell + \ln(u_1)\right) & \textit{(par composition de limites)}
  \end{array}$$

- On note alors : $C = \exp\big(\ell + \ln(u_1)\big) > 0$.
  Comme $C \neq 0$, on peut alors écrire :

$$n^{\alpha_0}\, u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C \quad \text{puis} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\alpha_0}} \qquad \left(\begin{array}{c}\textit{par compatibilité de la relation} \\ \underset{n\to+\infty}{\sim} \ \textit{avec le quotient}\end{array}\right)$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré l'existence d'un réel } C > 0 \text{ tel que : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\alpha_0}}.}$$

□

c) Que peut-on en déduire pour la série $\sum u_n$?

Démonstration.
On a :

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{C}{n^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$ (d'après la question précédente)

× $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$

× La série $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}$ (> 1).
  Il en est de même de la série $\sum \dfrac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série } \sum u_n \text{ est convergente.}}$$

□

4. a) Établir pour tout entier naturel n, la relation :

$$2\sum_{k=1}^{n+1} k\,u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k\,u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=0}^{n} k\,u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k &= 2\sum_{k=0}^{n}\Big(k\,u_k + u_k\Big) = 2\sum_{k=0}^{n}\Big((k+1)\,u_k\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\Big((2k+2)\,u_k\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\Big((2k+5)\,u_{k+1}\Big) && \textit{(par définition de la suite } (u_n)\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\Big((2(k-1)+5)\,u_k\Big) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\Big((2k+3)\,u_k\Big) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n+1} k\,u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ 2\sum_{k=1}^{n+1} k\,u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k\,u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k.}$$

□

b) En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente :

$$3 \sum_{k=1}^{n+1} u_k - 2 \sum_{k=0}^{n} u_k \ = \ 2 \sum_{k=0}^{n} k\, u_k - 2 \sum_{k=1}^{n+1} k\, u_k \qquad (*)$$

- D'une part :

$$\begin{aligned} 3 \sum_{k=1}^{n+1} u_k - 2 \sum_{k=0}^{n} u_k \ &= \ 3 \ \left(\left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right) - u_0 + u_{n+1} \right) - 2 \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \ (3-2) \ \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right) + 3\, u_{n+1} - 3\, u_0 \end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^{n} k\, u_k - 2 \sum_{k=1}^{n+1} k\, u_k \ &= \ 2 \sum_{k=1}^{n} k\, u_k - 2 \sum_{k=1}^{n+1} k\, u_k \\ &= \ 2 \sum_{k=1}^{n} k\, u_k - 2 \ \left(\left(\sum_{k=1}^{n} k\, u_k \right) + (n+1)\, u_{n+1} \right) \\ &= \ -2(n+1)\, u_{n+1} \end{aligned}$$

(car le premier terme de la somme est nul)

- Finalement, en réinjectant ces expressions dans l'égalité $(*)$, et en isolant $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = -2\,(n+1)\, u_{n+1} - 3\, u_{n+1} + 3\, u_0$$

Or :

× $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \right) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

En effet, on a démontré que la série $\sum u_n$ est convergente (en question ***3.c)***).

× $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)\, u_{n+1} = 0$.

En effet : $n\, u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n \dfrac{C}{n^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{C}{n^{\frac{1}{2}}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, u_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)\, u_{n+1} = 0$.

× $\lim\limits_{n \to +\infty} 3\, u_{n+1} = 0$.

En effet : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^{\frac{3}{2}}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

× $\lim\limits_{n \to +\infty} 3\, u_0 = 3\, u_0 = 3$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 3.}$$

□