DM2 (version B)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} \times u_n \end{cases}$$

1. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Écrire une fonction **Scilab** ayant pour argument n et renvoyant $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{(n+1)^\alpha\ u_{n+1}}{n^\alpha\ u_n}$$

3. a) Rappeler le développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(v_n) = (\alpha+1)\ \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{5}{2n}\right)$.

c) Pour quelle valeur α_0 du réel α la série de terme général $\ln(v_n)$ est-elle convergente ?

On se place maintenant dans le cas où $\alpha = \alpha_0$ (valeur obenue en ***2.c)***).

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(v_k)$ sans signe $\sum$.

b) En déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^{\alpha_0}}$.

c) Que peut-on en déduire pour la série $\sum u_n$?

5. a) Établir pour tout entier naturel n, la relation :

$$2\sum_{k=1}^{n+1} k\,u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k\,u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$$

b) En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.