
DM2 (version A)

Soit $\alpha > 0$ et $\sum u_n$ une série convergente à termes strictement positifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \text{et, si } n \geq 2, v_n = \frac{u_n}{(R_{n-1})^\alpha}$$

1. On supposera dans cette question que $u_n = \frac{1}{2^n}$.

a) Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer R_n .

b) En déduire v_n , puis donner une condition sur α pour que $\sum v_n$ converge.

Désormais, on ne suppose plus que $u_n = \frac{1}{2^n}$ et on traite le cas général.

2. Exprimer v_n en fonction de R_n , R_{n-1} et α .

3. En prenant $\alpha = 1$,

a) exprimer $\ln(1 - v_n)$ en fonction de $\ln(R_n)$ et de $\ln(R_{n-1})$.

b) en déduire la nature de $\sum v_n$.

4. On suppose : $\alpha > 1$.

a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$: $R_{n-1}^\alpha \leq R_n$.

b) En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

5. On suppose : $0 < \alpha < 1$.

a) Calculer $\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{1}{t^\alpha} dt$.

b) En déduire la nature de $\sum v_n$.