
DM1 vB

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $a_n = \frac{1}{n \ln(n)}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a : $\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln(k)}$.

Démonstration.

Soit $k \geq 2$. Soit $t \in [k, k+1]$. Alors :

$$k \leq t$$

$$\text{donc} \quad \ln(k) \leq \ln(t) \quad (\text{par croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[)$$

$$\text{d'où} \quad 0 \leq \ln(k) \leq \ln(t) \quad (\text{car } k \geq 2)$$

On a donc :

$$0 \leq k \leq t \quad \text{et} \quad 0 \leq \ln(k) \leq \ln(t)$$

Toutes les quantités étant positives, en multipliant membre à membre ces inégalités, on obtient :

$$k \ln(k) \leq t \ln(t)$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{k \ln(k)} \geq \frac{1}{t \ln(t)} \quad (\text{par décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[)$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leq k+1$) :

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{1}{k \ln(k)} dt &\geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \\ &= \\ &\frac{1}{k \ln(k)} \end{aligned}$$

Enfinement : $\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln(k)}$.

Dans la suite, on considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. a) Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

Démonstration.

• La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ car elle est le quotient $\frac{f_1}{f_2}$ de :

× $f_1 : x \mapsto -x$ qui est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$,

× $f_2 : x \mapsto (1-x) \ln(1-x)$ qui :

- est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$,

- NE S'ANNULE PAS sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$.

• La fonction f est continue en 0. En effet :

× d'une part :

$$-x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x \quad 1-x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 \quad \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$$

On en déduit :

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\cancel{-x}}{1 \times (\cancel{-x})} = 1$$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

× d'autre part : $f(0) = 1$.

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

On en conclut que la fonction f est continue sur $]-\infty, 1[$.

□

b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

Démonstration.

• Étudions la dérivabilité de f en 0 :

$$\tau_0(f)(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} - 1}{x} = \frac{-x - (1-x) \ln(1-x)}{x(1-x) \ln(1-x)}$$

• Tout d'abord :

$$x(1-x) \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \times 1 \times (-x) = -x^2$$

$$x(1-x) \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2$$

• Ensuite :

× comme $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie : $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

× Ainsi :

$$\begin{aligned}\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \\ -x \ln(1-x) &= x^2 + \frac{x^3}{2} - x^3 \varepsilon(x)\end{aligned}$$

× On en déduit :

$$\begin{aligned}(1-x) \ln(1-x) &= -x + \frac{x^2}{2} + x^2 \left(\varepsilon(x) + \frac{x}{2} - x \varepsilon(x) \right) \\ &= -x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)\end{aligned}$$

où $\varepsilon_1 : x \mapsto \varepsilon(x) + \frac{x}{2} - x \varepsilon(x)$ vérifie : $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$ (car $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$).

× D'où :

$$\begin{aligned}-x - (1-x) \ln(1-x) &= \cancel{-x} - \left(\cancel{-x} + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x) \right) \\ &= -\frac{x^2}{2} - x^2 \varepsilon_1(x)\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$-x - (1-x) \ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$-x - (1-x) \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Commentaire

Démontrons qu'on a effectivement : $-x^2 \varepsilon_1(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

$$\frac{-x^2 \varepsilon_1(x)}{x^2} = -\varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Ainsi, comme :

$$-x - (1-x) \ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} - x^2 \varepsilon_1(x)$$

on a bien :

$$-x - (1-x) \ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

• Finalement :

$$\tau_0(f)(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{-x^2} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Commentaire

Pour obtenir un développement limité (DL) de la fonction $x \mapsto -x - (1-x) \ln(1-x)$ en 0, on a utilisé ici l'écriture du DL de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ en 0 à l'aide d'une fonction ε pour faciliter la compréhension des calculs. Le lecteur à l'aise avec les notations de Landau pouvait privilégier leur manipulation. On obtient la démonstration suivante.

× Tout d'abord, comme $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0 : \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

× On en conclut :

$$\begin{aligned} -x \ln(1-x) &= x^2 + \frac{x^3}{2} - x o_{x \rightarrow 0}(x^2) \\ &= x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

En effet :

- d'une part : $\frac{x^3}{x^2} = \frac{x}{x \rightarrow 0} \rightarrow 0$. D'où : $\frac{x^3}{2} = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

- d'autre part : $o_{x \rightarrow 0}(x^2) = x^2 \varepsilon(x)$ où $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Donc :

$$\frac{-x o_{x \rightarrow 0}(x^2)}{x^2} = \frac{-x \times \cancel{x^2} \varepsilon(x)}{\cancel{x^2}} = x \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

D'où : $-x o_{x \rightarrow 0}(x^2) = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

On peut démontrer de la même manière, pour tout $\theta \in \mathbb{R} : \theta o_{x \rightarrow 0}(x^2) = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

On en déduit : $-x \ln(1-x) = x^2 + 2 o_{x \rightarrow 0}(x^2) = x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

× Ainsi :

$$\begin{aligned} \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \\ -x \ln(1-x) &= x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

× On en déduit :

$$\begin{aligned} (1-x) \ln(1-x) &= -x + \frac{x^2}{2} + 2 o_{x \rightarrow 0}(x^2) \\ &= -x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

× D'où :

$$-x - (1-x) \ln(1-x) = \cancel{-x} - \left(\cancel{-x} + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) = -\frac{x^2}{2} - o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Or : $-o_{x \rightarrow 0}(x^2) = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$. Ainsi :

$$-x - (1-x) \ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

□

3. a) Montrer que f est dérivable sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, 1[$.

Puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $] - \infty, 0[\cup]0, 1[$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ car elle est le quotient $\frac{f_1}{f_2}$ de :
 - × $f_1 : x \mapsto -x$ qui est dérivable sur $] - \infty, 0[$ et $]0, 1[$,
 - × $f_2 : x \mapsto (1 - x) \ln(1 - x)$ qui :
 - est dérivable sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, 1[$,
 - NE S'ANNULE PAS sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, 1[$.

La fonction f est dérivable sur $] - \infty, 0[\cup]0, 1[$.

- Soit $x \in] - \infty, 0[\cup]0, 1[$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(-1)(1-x)\ln(1-x) - (-x)\left((-1)\ln(1-x) + (1-x)\frac{-1}{1-x}\right)}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2} \\
 &= \frac{(x-1)\ln(1-x) + x(-\ln(1-x) - 1)}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2} \\
 &= \frac{(x-1)\ln(1-x) - x\ln(1-x) - x}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2} \\
 &= \frac{-x + ((x-1) - x)\ln(1-x)}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2}
 \end{aligned}$$

$$\forall x \in] - \infty, 0[\cup]0, 1[, f'(x) = -\frac{x + \ln(1-x)}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2}$$

□

b) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$, lorsque x appartient à $] - \infty, 1[$, puis en déduire les variations de f .

Démonstration.

- La fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$.
Sa courbe représentative \mathcal{C}_g se situe donc sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned}
 y &= g(1) + g'(1)(x-1) \\
 &= \ln(1) + \frac{1}{1}(x-1) = x-1
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) \leq x-1$$

L'égalité n'a lieu qu'au point 1 (le point de tangence). Autrement dit :

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \ln(x) < x-1$$

- Soit $t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

$$\begin{array}{lcl}
 & t \in]-\infty, 0[& \cup &]0, 1[\\
 \text{donc} & t < 0 & \text{OU} & 0 < t < 1 \\
 \text{d'où} & -t > 0 & \text{OU} & 0 > -t > -1 \\
 \text{puis} & 1 - t > 1 & \text{OU} & 1 > 1 - t > 0 \\
 \text{ainsi} & 1 - t \in]1, +\infty[& \cup &]0, 1[
 \end{array}$$

Ainsi : $1 - t \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$. On peut donc appliquer (*) à $x = 1 - t$. On obtient :

$$\begin{array}{l}
 \ln(1 - t) < (\cancel{1} - t) - \cancel{1} \\
 \qquad \qquad \qquad \parallel \\
 \qquad \qquad \qquad -t
 \end{array}$$

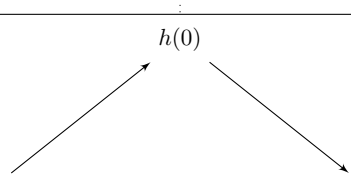
On en déduit : $\forall t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, $\ln(1 - t) + t < 0$.

Commentaire

Pour démontrer l'inégalité ci-dessus, on pouvait également étudier la fonction

$$h : x \mapsto \ln(1 - x) + x$$

1) On justifie que h est dérivable sur $]-\infty, 1[$,
 2) On détermine les variations de h sur $]-\infty, 1[$.
 On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	1
Signe de $h'(x)$	+	0	-
Variations de h			

3) Comme la fonction h admet un unique maximum en 0, alors :

$$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$$
, $h(x) < h(0) = 0$

Autrement dit : $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, $\ln(1 - x) + x < 0$.

- Soit $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.
 × D'après ce qui précède : $\ln(1 - x) + x < 0$.
 × De plus : $(1 - x)^2 (\ln(1 - x))^2 > 0$.
 On obtient :

$$f'(x) = -\frac{x + \ln(1 - x)}{(1 - x)^2 (\ln(1 - x))^2} > 0$$

De plus, d'après la question précédente : $f'(0) > 0$.

Ainsi : $\forall x \in]-\infty, 1[$, $f'(x) > 0$.

On en conclut que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$.

□

- c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variations.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{\cancel{-x}}{\cancel{-x} \times \ln(1-x)} = \frac{1}{\ln(1-x)}$$

Or, avec le changement de variable $u = 1 - x$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(u) = +\infty$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\ln(1-x)} = 0.$

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$

- De plus :

× d'une part : $\lim_{x \rightarrow 1} -x = -1,$

× d'autre part, toujours avec le changement de variable $u = 1 - x$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)\ln(1-x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln(u) = 0 \quad (\text{par croissances comparées})$$

Comme on sait par ailleurs que le dénominateur est négatif au voisinage de 1, on en déduit : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty.$

- D'après les questions précédentes, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	1
Signe de $f'(x)$	+	+	
Variations de f			

□

4. a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n , tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1 .

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est :

× continue sur $[0, 1[$ (d'après 2.a),

× strictement croissante sur $[0, 1[$ (d'après 3.b)).

Ainsi, la fonction f réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $f([0, 1[)$ où :

$$f([0, 1[) = \left] f(0), \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right[= [1, +\infty[$$

Or : $n \in [1, +\infty[$ (car $n \in \mathbb{N}^*$).

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution u_n dans $[0, 1[$.

- Par définition, le réel u_1 est l'**unique** solution de l'équation $f(x) = 1$ sur $[0, 1[$.
Or $0 \in [0, 1[$ est solution de cette équation. En effet, par définition de $f : f(0) = 1$.

On en déduit : $u_1 = 0$.

□

b) Montrer que la suite (u_n) converge et : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n < 1$.

La suite (u_n) est donc bornée.

- Pour montrer qu'elle est convergente, il suffit alors de démontrer qu'elle est monotone.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

× Par définition de u_n et u_{n+1} :

$$f(u_n) = n \leq n + 1 = f(u_{n+1})$$

× Or, d'après la question précédente, la fonction f réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $[1, +\infty[$.
D'après le théorème de la bijection, $f^{-1} : [1, +\infty[\rightarrow [0, 1[$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

En appliquant f^{-1} , on obtient alors :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(f(u_n)) & \leq & f^{-1}(f(u_{n+1})) \\ \parallel & & \parallel \\ u_n & & u_{n+1} \end{array}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.

- La suite (u_n) est :
 - × croissante,
 - × majorée par 1.

La suite (u_n) est donc convergente de limite $\ell \in [0, 1]$.

Commentaire

- On rappelle que, par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent **larges**.
Plus précisément :

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_n > a \\ u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \ell \geq a$$

- On pourra retenir l'exemple classique de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$:

× d'une part : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > 0$

× d'autre part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \neq 0$

- Démontrons par l'absurde : $\ell = 1$.

Supposons que $\ell \in [0, 1[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de (u_n) :

$$f(u_n) = n$$

Par passage à la limite, on obtient :

× d'une part, comme la fonction f est continue en ℓ (car $\ell \in [0, 1[$) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

× d'autre part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.

Ainsi : $f(\ell) = +\infty$.

Absurde! (car $f(\ell) \in \mathbb{R}$)

On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Commentaire

- On pouvait également déterminer la limite de la suite (u_n) en composant par f^{-1} .

× Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f(u_n) = n$$

$$\text{donc } f^{-1}(f(u_n)) = f^{-1}(n)$$

$$\text{d'où } u_n = f^{-1}(n)$$

× Or : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$. D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = 1$. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

- Les questions **4.a)** et **4.b)** consistent en l'étude de la suite (u_n) . On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite (u_n) mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est l'unique solution dans $[0, 1[$ de l'équation $f(x) = n$

On comprend alors que l'étude de (u_n) va passer par l'étude des propriétés de la fonction f .

- De cette définition, on tire la propriété : $\forall m \in \mathbb{N}^*, f(u_m) = m$.

Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite (u_n) .

C'est de cette propriété dont on se sert ici (en $m = n$ et $m = n + 1$) pour démontrer la monotonie de la suite (u_n) . Comme la suite (u_n) est définie de manière implicite, cette étude ne se réalise pas directement en étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$. Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1})$$

et de conclure : $u_n \leq u_{n+1}$ à l'aide d'une propriété de f . □

- c) Pour tout entier naturel n non nul, calculer $f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 , on a : $u_n \leq 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux cas se présentent :

× si $n = 1$, alors :

$$f\left(1 - \frac{1}{1 \times \sqrt{1}}\right) = f(0) = 1$$

$$\text{Si } n = 1 : f\left(1 - \frac{1}{1 \times \sqrt{1}}\right) = 1$$

× si $n \geq 2$, alors :

$$\begin{aligned} f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) &= \frac{-\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{\left(x - \left(x - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) \ln\left(x - \left(x - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{n\sqrt{n}} - 1}{\frac{1}{n\sqrt{n}} \ln\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)} \\ &= \frac{n\sqrt{n} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} - 1\right)}{-\ln(n\sqrt{n})} \\ &= -\frac{1 - n\sqrt{n}}{\ln(n) + \frac{1}{2} \ln(n)} \\ &= \frac{n\sqrt{n} - 1}{\frac{3}{2} \ln(n)} \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout } n \geq 2 : f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{3} \frac{n\sqrt{n} - 1}{\ln(n)}.$$

- Soit $n \geq 2$.

$$u_n \leq 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}} \Leftrightarrow f(u_n) \leq f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \quad (\text{car } f \text{ est strictement croissante sur } [0, 1])$$

$$\Leftrightarrow n \leq \frac{2n\sqrt{n} - 1}{3 \ln(n)} \quad (\text{d'après le point précédent, car } n \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{n\sqrt{n} - 1}{n \ln(n)} \quad (\text{car } n > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} - \frac{1}{n \ln(n)} \quad (*)$$

• Or :

× d'une part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(n) = +\infty$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \ln(n)} = 0$.

× d'autre part, avec le changement de variable $u = \sqrt{n}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{\ln(u^2)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{2 \ln(u)} = +\infty \quad (\text{par croissance comparées})$$

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} - \frac{1}{n \ln(n)} = +\infty$.

On en déduit que, pour tout $A \geq 0$, il existe $n_0 \geq 2$ tel que, pour tout $n \geq n_0$:

$$\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} - \frac{1}{n \ln(n)} \geq A$$

En particulier, pour $A = \frac{3}{2}$, il existe $n_0 \geq 2$ tel que, pour tout $n \geq n_0$:

$$\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} - \frac{1}{n \ln(n)} \geq \frac{3}{2}$$

• Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, l'assertion (*) est vraie. D'où, par équivalence, pour tout $n \geq n_0$:

$$u_n \leq 1 - \frac{1}{n \sqrt{n}}$$

Il existe $n_0 \geq 2$ tel que, pour tout $n \geq n_0$: $u_n \leq 1 - \frac{1}{n \sqrt{n}}$.

Commentaire

- On utilise dans cette 2^{ème} partie de question la définition de la divergence d'une suite vers $+\infty$. Rappelons la.
- Soit (v_n) une suite de réels.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A \geq 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow (v_n \geq A)$$

□

d) En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général $\frac{1}{-n \ln(1 - u_n)}$ est divergente.

Démonstration.

• Tout d'abord, soit $n \geq n_0$ (où $n_0 \geq 2$ est l'entier défini en question précédente) :

$$u_n \leq 1 - \frac{1}{n \sqrt{n}} \quad (\text{d'après la question précédente})$$

donc $1 - u_n \geq 1 - \left(1 - \frac{1}{n \sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n \sqrt{n}}$

d'où $\ln(1 - u_n) \geq \ln\left(\frac{1}{n \sqrt{n}}\right) = -\frac{3}{2} \ln(n)$ (*par stricte croissance de ln sur $]0, +\infty[$*)

puis $-n \ln(1 - u_n) \leq \frac{3}{2} n \ln(n)$

ainsi $\frac{1}{-n \ln(1 - u_n)} \geq \frac{2}{3} \frac{1}{n \ln(n)}$ (*par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$*)

- On obtient donc :

$$\times \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq \frac{2}{3} a_n \leq \frac{1}{-n \ln(1 - u_n)}$$

- × la série $\sum_{n \geq 2} a_n$ est divergente d'après la question 1.. Il en est de même de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{2}{3} a_n$.

(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $\frac{2}{3} \neq 0$)

Par critère de comparaison des séries à termes positifs,
la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{-n \ln(1 - u_n)}$ est divergente.

Commentaire

- L'énoncé est très clair : il s'agit de déterminer la nature d'une série sans effectuer de calcul de somme. Cela ne laisse d'autre choix que de mettre en place un critère de comparaison / équivalence / négligeabilité des séries à termes positifs.
- En toute rigueur, comme l'encadrement :

$$0 \leq \frac{2}{3} a_n \leq \frac{1}{-n \ln(1 - u_n)}$$

n'est valable que pour $n \geq n_0$, on devrait conclure que la série $\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{-n \ln(1 - u_n)}$ est divergente. Cependant, on ne change pas la nature d'une série en lui ajoutant un nombre fini de termes. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{-n \ln(1 - u_n)}$ est bien divergente. □

- e) Conclure, en revenant à la définition de u_n , que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de u_n :

$$f(u_n) = n$$

$$\text{donc } \frac{-u_n}{(1 - u_n) \ln(1 - u_n)} = n$$

$$\text{d'où } \frac{-u_n}{n \ln(1 - u_n)} = 1 - u_n$$

- Ainsi, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, alors : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$. D'où :

$$1 - u_n = \frac{-u_n}{n \ln(1 - u_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{n \ln(1 - u_n)} = \frac{1}{-n \ln(1 - u_n)}$$

- On obtient :

$$\times 1 - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{-n \ln(1 - u_n)} \geq 0$$

- × la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{-n \ln(1 - u_n)}$ est divergente d'après la question précédente.

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 2} (1 - u_n)$ est divergente. □