DM1 vB

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $a_n = \dfrac{1}{n\ \ln(n)}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ \ln(t)}\ dt \leqslant \frac{1}{k\ \ln(k)}$.

b) En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général a_n.

Dans la suite, on considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ \ln(1-x)} & \text{si } x \in\ ]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. ***a)*** Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

3. ***a)*** Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$.
Puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, 1[$.

b) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$, lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.

c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variations.

4. ***a)*** Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1.

b) Montrer que la suite (u_n) converge et : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

c) Pour tout entier naturel n non nul, calculer $f\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a : $u_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

d) En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général $\dfrac{1}{-n\ \ln(1-u_n)}$ est divergente.

e) Conclure, en revenant à la définition de u_n, que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.