DM4 correction

Exercice avec préparation 1
Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

2. ***a)*** On pose : $T = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). Montrer que la loi de T est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}([T = k]) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^k$$

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors : $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par définition de la partie entière : } T(\Omega) \subset \mathbb{N}.}$$

Commentaire

En particulier, la v.a.r. T est une variable aléatoire discrète.

- Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([T = k]) & = & \mathbb{P}([\lfloor X \rfloor = k]) & \\
 & = & \mathbb{P}([k \leqslant X < k+1]) & \textit{(par définition de la partie entière)} \\
 & = & F_X(k+1) - F_X(k) & \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\
 & = & \left(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\lambda(k-1)}\right) - \left(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\lambda k}\right) & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\
 & = & \mathrm{e}^{-\lambda k} - \mathrm{e}^{-\lambda(k-1)} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([T = k]) \ = \ \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) \ \mathrm{e}^{-\lambda k} \ = \ \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) \ \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^k.}$$

Commentaire

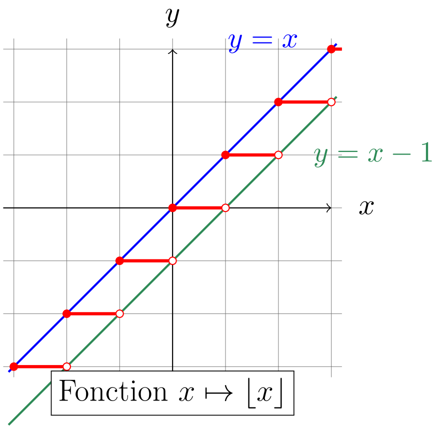
- On rappelle qu'on appelle fonction partie entière la fonction suivante.

$$\begin{array}{rccccl} \lfloor\,.\,\rfloor & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} & \\ & & x & \mapsto & \lfloor x \rfloor & = \text{ le plus grand entier } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n \leqslant x \end{array}$$

  On peut aussi définir $\lfloor x \rfloor$ comme l'unique entier relatif vérifiant la propriété : $n \leqslant x < n+1$.
- Une propriété fondamentale provenant de la définition de cette fonction est donc :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ \left(\lfloor u \rfloor = n \quad \Leftrightarrow \quad n \ \leqslant\ u \ <\ n+1\right)}$$

  En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
- Sa représentation graphique est la suivante :



Fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$

b) Quelle est la loi de $T+1$? En déduire l'espérance et la variance de T.

Démonstration.
On note $Z = T+1$.

- Tout d'abord, comme $T(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors : $(T+1)(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z=k]) & = & \mathbb{P}([T+1=k]) & \\ & = & \mathbb{P}([T=k-1]) & \\ & = & \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\right)\left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^{k-1} & \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

  On reconnaît une expression de la forme : $\mathbb{P}([Z=k]) = p\,(1-p)^{k-1}$, où $p = 1-\mathrm{e}^{-\lambda}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\right).}$$

- La v.a.r. Z admet une variance (donc une espérance).

  [Ainsi, la v.a.r. $T = Z-1$ admet une variance (donc une espérance) en tant que transformée affine d'une v.a.r. qui en admet une. **]**

- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(T) & = & \mathbb{E}(Z-1) & \\ & = & \mathbb{E}(Z)-1 & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} & \textit{(car } Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1-e^{-\lambda}\right)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) \ = \ \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(T) & = & \mathbb{V}(Z-1) & \\ & = & \mathbb{V}(Z) & \textit{(par propriété de la variance)} \\ & = & \dfrac{\cancel{1}-\left(\cancel{1}-\mathrm{e}^{-\lambda}\right)}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} & \textit{(car } Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1-e^{-\lambda}\right)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(T) \ = \ \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}}$$

□

3. On pose : $Z = X - \lfloor X \rfloor$.
Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.

Démonstration.

- On note $h : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ de telle sorte que $Z = h(X)$.
On sait tout d'abord : $X(\Omega) = [0, +\infty[$. On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} Z(\Omega) & = & \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) \\ & = & h([0, +\infty[) \\ & \subset & [0, 1[\end{array}$$

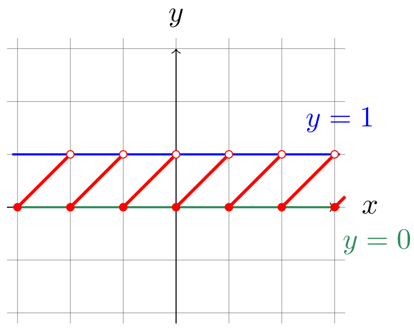
La dernière inclusion est obtenue de la manière suivante.
Soit $x \in [0, +\infty[$. Par définition de la partie entière :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \ \Leftrightarrow \ 0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1 \ \Leftrightarrow \ 0 \leqslant h(x) < 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Z(\Omega) \subset [0, 1[}$$

Commentaire

- Pour tout nombre réel x, le nombre réel $x - \lfloor x \rfloor$ correspond à la partie décimale du nombre x. C'est pourquoi on nomme la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ *fonction partie fractionnaire.*
- Sa représentation graphique est la suivante :



Fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$

- La fonction partie fractionnaire est un cas particulier de fonctions dites 1-*périodiques.*
  - Soit $T \in [0, +\infty[$. Une fonction est dite T-périodique si :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x+T) = f(x)$$
  Le réel T est appelé *période de la fonction* f.
  - La représentation graphique sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f T-périodique s'obtient par translation de sa représentation graphique sur un intervalle de longueur T (par exemple l'intervalle $[0, T[$).

  La fonction partie fractionnaire est donc une fonction 1-périodique. Sa représentation graphique sur $\mathbb{R}$ s'obtient bien par translation de sa représentation graphique sur un intervalle de longueur 1 (par exemple par translation de sa représentation graphique sur l'intervalle $[0, 1[$).

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  - si $x \in]-\infty, 0[$, alors : $[Z \leqslant x] = \varnothing$, car $Z(\Omega) \subset [0, 1[$. Donc :
  $$F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
  - si $x \in [0, 1[$, alors :
  $$F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}([X - T \leqslant x])$$

La famille $([T=k])_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
Par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X-T\leqslant x]) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X-T\leqslant x]\cap[T=k]) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X-k\leqslant x]\cap[T=k]) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X\leqslant k+x]\cap[\lfloor X\rfloor=k]) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X\leqslant k+x]\cap[k\leqslant X<k+1]) & \textit{(par définition de la partie entière)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([k\leqslant X\leqslant k+x]) & \textit{(car } x\in[0,1[\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(F_X(k+x)-F_X(k)\right) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left((\cancel{1}-\mathrm{e}^{-\lambda(k+x)})-(\cancel{1}-\mathrm{e}^{-\lambda k})\right) & \textit{(car } X\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\lambda k}-\mathrm{e}^{\lambda(k+x)}\right) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda k}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) & \\
& = & \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^k & \\
& = & \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} & \textit{(car } \mathrm{e}^{-\lambda}\in\,]-1,1[\textit{)}
\end{array}$$

× si $x\in[1,+\infty[$, alors : $[Z\leqslant x]=\Omega$, car $Z(\Omega)\subset[0,1[$. Donc :

$$F_Z(x) \;=\; \mathbb{P}([Z\leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\Omega) \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{Finalement, } F_Z : x\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} & \text{si } x\in[0,1[\\ 1 & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}}$$

- La fonction F_Z est continue :
  × sur $]-\infty,0[$ et sur $]1,+\infty[$ en tant que fonctions constantes,
  × sur $]0,1[$ en tant que combinaison linéaires de fonctions continues sur $]0,1[$,
  × en 0. En effet, d'une part : $\lim\limits_{x\to 0^-} F_Z(x)=0$. D'autre part :

$$\lim_{x\to 0^+} F_Z(x) \;=\; F_Z(0) \;=\; \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda\,0}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} \;=\; \frac{1-1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} \;=\; 0$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^-} F_Z(x) \;=\; F_Z(0) \;=\; \lim\limits_{x\to 0^+} F_Z(x)$.

× en 1. En effet, d'une part : $\lim\limits_{x \to 1^+} F_Z(x) = F_Z(1) = 1$. D'autre part :

$$\lim_{x \to 1^-} F_Z(x) \; = \; \frac{1 - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \; = \; 1$$

$$\boxed{\text{La fonction } F_Z \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- La fonction F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F_Z \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en 0 et en 1.}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } Z \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f_Z de Z, on dérive la fonction F_Z sur les intervalles **ouverts** $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

× Si $x \in]-\infty, 0[$.

$$f_Z(x) \; = \; F_Z'(x) \; = \; 0$$

× Si $x \in]0, 1[$

$$f_Z(x) \; = \; F_Z'(x) \; = \; \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \, \lambda \, e^{-\lambda x}$$

× Si $x \in]1, +\infty[$.

$$f_Z(x) \; = \; F_Z'(x) \; = \; 0$$

× On choisit enfin : $f_Z(0) = 0$ et $f_Z(1) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, une densité } f_Z \text{ de } Z \text{ est : } f_Z : \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \, e^{-\lambda x} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

□

4. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$.
Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question précédente :

$$F_{Z_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{1 - e^{-\frac{\lambda}{n} x}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}} & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

- Pour conclure quant à la convergence en loi de (Z_n), on détermine la limite de la suite $(F_{Z_n}(x))_{n \geqslant 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

× Soit $x < 0$. Alors, par définition de F_{Z_n} :

$$\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) \; = \; 0$$

× Soit $x \in [0,1[$. Par définition de (F_{Z_n}) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{Z_n}(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}x}}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}}$$

Or :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{\lambda}{n}\,x = 0$. Donc :

$$\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}x} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\lambda}{n}\,x$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{\lambda}{n} = 0$. Donc :

$$\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\lambda}{n}$$

On en déduit :

$$F_{Z_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\cancel{\frac{\lambda}{n}}\,x}{\cancel{\frac{\lambda}{n}}} = x$$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = x$.

× Soit $x \geqslant 1$. Alors, par définition de F_{Z_n} :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = G(x), \\ \text{où } G : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.\end{array}}$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. U qui suit la loi $\mathcal{U}([0,1[)$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = G(x) = F_U(x)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (Z_n) \text{ converge en loi vers } U, \text{ une v.a.r. de loi } \mathcal{U}([0,1[).}$$

□

Exercice sans préparation 1
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$ et $\text{rg}(f^2) = 1$.
Montrer que le spectre de f est $\{0\}$ ou $\{0, 1\}$ ou $\{-1, 0\}$.

Démonstration. • Tout d'abord : $f^4 - f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
× Le polynôme $Q(X) = X^4 - X^2$ est donc un polynôme annulateur de f.
× Or :

$$Q(X) = X^4 - X^2 = X^2 (X^2 - 1) = X^2 (X - 1)(X + 1)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{-1, 0, 1\}.}$$

• Montrons tout d'abord que 0 est valeur propre de f. On procède par l'absurde.
Supposons que 0 n'est pas valeur propre de f.
Alors : $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ et l'endomorphisme f est donc injectif.
De plus, E est un espace vectoriel de **dimension finie**. On en conclut que f est bijectif.
Or :

$$\begin{array}{cc} \text{comme} & f^4 = f^2 \\ \text{alors} & f^{-1} \circ f^4 = f^{-1} \circ f^2 \\ \text{donc} & f^3 = f \\ \text{d'où} & f^{-1} \circ f^3 = f^{-1} \circ f \\ \text{ainsi} & f^2 = \text{id}_E \end{array}$$

On en déduit : $\text{rg}\left(f^2\right) = \text{rg}\left(\text{id}_E\right) = 3$.
Ceci est absurde.

$$\boxed{\text{Ainsi : } 0 \in \text{Sp}(f).}$$

• Quatre cas se présentent alors :
× $\text{Sp}(f) = \{0, -1, 1\}$,
× $\text{Sp}(f) = \{0, -1\}$,
× $\text{Sp}(f) = \{0, 1\}$,
× $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

Montrons que le premier cas ne peut pas être réalisé.
Supposons : $\text{Sp}(f) = \{0, -1, 1\}$.
× On sait alors :
- $f \in \mathscr{L}(E)$ avec $\dim(E) = 3$,
- f admet 3 valeurs propres **distinctes** : -1, 1 et 0 (d'après le point précédent).

On en déduit que l'endomorphisme f est diagonalisable.
Notons $\mathscr{B}$ une base de vecteurs propres de f. On obtient alors :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

× Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^2\right) &= \Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big)^2 \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0^2 \end{pmatrix} \quad \textit{(car } \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \textit{ est diagonale)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où : $\text{rg}\left(f^2\right) \ = \ \text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2)\right) \ = \ 2.$
Ceci est absurde.

$\boxed{\text{On en déduit que } -1 \text{ ou } 1 \text{ n'est pas valeur propre de } f.}$

$\boxed{\text{Finalement, le spectre de } f \text{ est } \{0\} \text{ ou } \{0,1\} \text{ ou } \{-1,0\}.}$ □