
DM4

Exercice avec préparation 1. [vA ET vB]

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

2. a) On pose : $T = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). Montrer que la loi de T est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([T = k]) = (1 - e^{-\lambda}) (e^{-\lambda})^k$$

b) Quelle est la loi de $T + 1$? En déduire l'espérance et la variance de T .

3. On pose : $Z = X - \lfloor X \rfloor$.

Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z .

4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice sans préparation 1. [UNIQUEMENT POUR LA vB]

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$ et $\text{rg}(f^2) = 1$. Montrer que le spectre de f est $\{0\}$ ou $\{0, 1\}$ ou $\{-1, 0\}$.