DM3 vB

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.

1. On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie.
On suppose qu'à chaque lancer la probabilité d'obtenir Pile est égale à p.
Dans la suite, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on notera :

× P_i : « Obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer ».

× F_i : « Obtenir Face au $i^{\text{ème}}$ lancer ».

On définit les variables aléatoires X_1 et X_2 de la façon suivante :

× X_1 prend la valeur k si le premier Pile de rang impair s'obtient au rang $2k-1$ (entier qui représente le $k^{\text{ème}}$ nombre impair de $\mathbb{N}^*$) ;

× X_2 prend la valeur k si le premier Pile de rang pair s'obtient au rang $2k$ (entier qui représente le $k^{\text{ème}}$ nombre pair de $\mathbb{N}^*$).

Par exemple si l'on obtient (Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile) alors X_1 prend la valeur 4 et X_2 prend la valeur 1. De plus, si Pile n'apparaît à aucun rang impair (respectivement à aucun rang pair), on considère que X_1 prend la valeur 0 (respectivement X_2 prend la valeur 0).

a) Démontrer : $\mathbb{P}([X_1 = 0]) = \mathbb{P}([X_2 = 0]) = 0$.

Démonstration.

- L'événement $[X_1 = 0]$ est réalisé si et seulement si Pile n'apparaît à aucun rang impair. Autrement dit, si l'on a obtenu Face à tous les rangs impairs. Ainsi :

$$[X_1 = 0] \ = \ \bigcap_{k=1}^{+\infty} F_{2k-1}$$

- D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}\big([X_1 = 0] \big) \ = \ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_{2k-1} \right) \ = \ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{2k-1} \right)$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{2k-1} \right) &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(F_{2k-1}\big) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\ &= \prod_{k=1}^{n} q \\ &= q^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 && \textit{(car } q \in]-1,1[\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On en conclut : } \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \big) \ = \ \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} F_{2k-1} \right) \ = \ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n \ = \ 0. \\ \textit{(l'événement } [X_1 = 0] \textit{ est négligeable)} \end{array}}$$

$$\boxed{\text{On démontre de même : } \mathbb{P}\big([X_2 = 0] \big) \ = \ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{2k} \right) \ = \ \lim_{n \to +\infty} q^n \ = \ 0.}$$

Commentaire

- Ces deux résultats doivent apparaître comme naturels. En effet, lors d'une infinité de lancers avec une pièce qui produit des Pile avec une probabilité non nulle, il apparaît logique d'obtenir au moins un Pile.
- Rappelons que même en cas d'indépendance (ce qui est le cas dans l'exercice), on ne peut écrire :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_{2k-1}\right) \;\cancel{=}\; \prod_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(F_{2k-1}\big)$$

  Deux raisons à cela :

  × le symbole $\prod\limits_{k=1}^{+\infty}$ (produit infini) n'est pas présent dans le programme ECE. Évidemment, on conçoit que l'on aurait pu définir la notion de convergence de produit infini à l'aide des produits partiels (en s'inspirant de l'étude des séries).

  × la notion d'indépendance d'une infinité d'événements ne fait pas intervenir d'intersection infinie d'événements et donc pas de produit infini. On rappelle qu'on dit d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'elle est une suite d'événements indépendants si pour tout ensemble fini $J \subset \mathbb{N}$, la famille $(A_i)_{i\in J}$ est un famille de v.a.r. indépendantes.

□

b) Calculer $\mathbb{P}([X_1 = 1])$ et $\mathbb{P}([X_2 = 1])$.
Déterminer les lois de X_1 et de X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- L'événement $[X_1 = 1]$ est réalisé si et seulement si le premier Pile de rang impair apparaît lors du premier rang impair, c'est-à-dire au rang 1. Ainsi :

$$[X_1 = 1] \;=\; P_1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([X_1 = 1]\big) \;=\; \mathbb{P}\big(P_1\big) \;=\; p.}$$

- L'événement $[X_2 = 1]$ est réalisé si et seulement si le premier Pile de rang pair apparaît lors du premier rang pair, c'est-à-dire au rang 2. Ainsi :

$$[X_2 = 1] \;=\; P_2$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([X_2 = 1]\big) \;=\; \mathbb{P}\big(P_2\big) \;=\; p.}$$

- Remarquons tout d'abord : $X_1\big(\Omega\big) = \mathbb{N}$.
En effet, le premier Pile de rang impair peut apparaître lors de n'importe quel rang impair $2k-1$ et X_2 prend alors la valeur $k \in \mathbb{N}^*$. De plus, si Pile n'apparaît pas en rang impair, la v.a.r. X_1 prend alors la valeur 0.
- Soit $k \geqslant 2$ (les cas $k = 0$ et $k = 1$ ont déjà été traités).
L'événement $[X_1 = k]$ est réalisé si et seulement si le premier Pile de rang impair apparaît lors du lancer $2k-1$. Autrement dit, cet événement est réalisé si et seulement si on a obtenu seulement des Face pour tous les rangs impairs précédant strictement $2k-1$ pui Pile au rang impair $2k-1$. Finalement :

$$[X_1 = k] \;=\; \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_{2i-1}\right) \cap P_{2k-1}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\,[X_1 = k]\,\big) &= \mathbb{P}\Big(\Big(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_{2i-1}\Big) \cap P_{2k-1}\Big) \\
&= \Big(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}\big(F_{2i-1}\big)\Big) \times \mathbb{P}\big(P_{2k-1}\big) \qquad \textit{(par indépendance des lancers)} \\
&= \Big(\prod_{i=1}^{k-1} q\Big) \times p \;=\; q^{k-1}\, p
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$$

Commentaire

Dans le cours, il est précisé qu'une v.a.r. X qui suit une loi géométrique (de paramètre p) admet pour ensemble image $\mathbb{N}^*$. Ici, X_1 a pour ensemble image $\mathbb{N}$ mais prend la valeur 0 avec probabilité nulle. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big(\,[X = x]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[X_1 = x]\,\big)$$

(et ces probabilités sont nulles si $x \in \mathbb{N}^*$)

Dans ce cas, on considère que X et X_1 sont toutes deux de même loi $\mathcal{G}(p)$.

- De même : $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$. On obtient, de manière analogue à ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\,[X_2 = k]\,\big) &= \mathbb{P}\Big(\Big(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_{2i}\Big) \cap P_{2k}\Big) \\
&= \Big(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}\big(F_{2i}\big)\Big) \times \mathbb{P}\big(P_{2k}\big) \qquad \textit{(par indépendance des lancers)} \\
&= \Big(\prod_{i=1}^{k-1} q\Big) \times p \;=\; q^{k-1}\, p
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } X_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$$

□

c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au minimum de X_1 et de X_2.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$, on a : $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
[Y > k] &= [\ \min(X_1, X_2) > k\ ] \\
&= [X_1 > k] \cap [X_2 > k]
\end{aligned}$$

Commentaire

- On fait ici l'étude de la loi d'un minimum de v.a.r. . Cette étude est classique et commence toujours par l'énoncé de l'égalité entre événements :

$$[\min(X_1, X_2) > k] \;=\; [X_1 > k] \cap [X_2 > k]$$

- On rappelle que dans le cas de l'étude d'un maximum de v.a.r. , on commence par une égalité similaire :

$$[\max(X_1, X_2) \leqslant k] \;=\; [X_1 \leqslant k] \cap [X_2 \leqslant k]$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Y > k]) & = & \mathbb{P}\left([X_1 > k] \cap [X_2 > k]\right) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 > k]) \times \mathbb{P}([X_2 > k]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & q^k \times q^k & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ suivent la loi } \mathcal{G}(p)\textit{)} \\ & = & \left(q^k\right)^2 \ = \ q^{2k} \ = \ \left(q^2\right)^k & \end{array}$$

Commentaire

- Lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, il faut savoir démontrer et penser à utiliser la propriété :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\,[X > k]\,\big) = (1-p)^k$$

Rappelons brièvement la démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On remarque tout d'abord :

$$\mathbb{P}\big(\,[X > k]\,\big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\Big(\overline{[X > k]}\Big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\big(\,[X \leqslant k]\,\big)$$

Par ailleurs, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$: $[X \leqslant k] \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} \ [X = i]$.
On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\,[X \leqslant k]\,\big) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \ [X = i]\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\big(\,[X = i]\,\big) & \textit{(car } \big(\,[X = i]\,\big)_{i \in [\![1,k]\!]} \textit{ est une famille d'événements deux à deux incompatibles)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} p\ q^{i-1} \ = \ p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i & \\ & = & p\ \dfrac{1-q^k}{1-q} \ = \ 1 - q^k & \end{array}$$

Enfin : $\mathbb{P}\big(\,[X > k]\,\big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\big(\,[X \leqslant k]\,\big) \ = \ 1 - (1 - q^k) \ = \ q^k$.

- Dans le cas classique où l'on considère un lancer infini d'une pèce de monnaie et X la v.a.r. qui donne le rang d'obtention du premier Pile, la démonstration de cette propriété est encore plus simple.

L'événément $[X > k]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu le premier Pile a un rang strictement plus grand que k. Ceci est vérifié si et seulement si on a obtenu Face lors des k premiers lancers. Ainsi :

$$[X > k] \ = \ F_1 \cap \ldots \cap F_k$$

Et ainsi,

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\,[X > k]\,\big) & = & \mathbb{P}\big(F_1 \cap \ldots \cap F_k\big) & \\ & = & \mathbb{P}(F_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(F_k) & \textit{(par indépendance des lancers)} \\ & = & q \times \ldots \times q \ = \ q^k & \end{array}$$

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned} [Y = k] \ \cup \ [Y > k] &= [Y \geqslant k] \\ &= [Y > k-1] \qquad \textit{(car } Y \textit{ est à valeurs entières)} \end{aligned}$$

Et comme $[Y = k]$ et $[Y > k]$ sont incompatibles, on a :

$$\underset{\displaystyle \mathbb{P}\big([Y > k-1]\big)}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}\big([Y = k] \ \cup \ [Y > k]\big)}} = \mathbb{P}\big([Y = k]\big) + \mathbb{P}\big([Y > k]\big)$$

- Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([Y = k]\big) &= \mathbb{P}\big([Y > k-1]\big) - \mathbb{P}\big([Y > k]\big) \\ &= (q^2)^{k-1} - (q^2)^k \ = \ (q^2)^{k-1} \left(1 - q^2\right) \ = \ \left(1 - (1-q^2)\right)^{k-1} \left(1 - q^2\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - q^2\right).}$$

Commentaire

Si $p \in \,]0,1[$, on a démontré :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \ X \text{ à valeurs entières} \\ \bullet \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}\big([X > k]\big) = (1-p)^k \end{array}\right\} \ \Leftrightarrow \ X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$$

Cette propriété n'apparaît pas officiellement au programme et ne peut donc pas, a priori, être utilisée directement aux écrits. Il est toutefois conseillé de la connaître et savoir la redémontrer car c'est une propriété classique. On la retrouve fréquemment dans les exercices d'oraux `HEC` (à l'oral, on peut l'utiliser sans démonstration - sauf avis contraire du jury, évidemment !).

$\square$

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

a) Montrer que la variable aléatoire $Y = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre *(on rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre x)*.

Démonstration.

- Commençons par déterminer l'ensemble image $Y(\Omega)$.
Notons $h : x \mapsto \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor$, de telle sorte que : $Y = h(X)$.
On considère ici $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) \\ &= h\big(\mathbb{N}^*\big) \ \subset \ \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

En effet, la fonction h :

- × est croissante sur $\mathbb{R}$ comme composée $h = h_2 \circ h_1$ où :
  - $h_1 : x \mapsto \dfrac{x+1}{2}$, croissante sur $\mathbb{R}$.
  - $h_2 : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ croissante sur $\mathbb{R}$.
- × est à valeurs entières : comme $h_2(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ alors $h(\mathbb{R}) = (h_2 \circ h_1)(\mathbb{R}) = h_2\big(h_1(\mathbb{R})\big) \subset \mathbb{Z}$.
- × vérifie : $h(1) = \left\lfloor \dfrac{1+1}{2} \right\rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$.

$$\boxed{\text{Et ainsi : } Y(\Omega) \ \subset \ \mathbb{N}^*.}$$

Commentaire

- On peut démontrer précisément : $h\big(\mathbb{N}^*\big) = \mathbb{N}^*$.
Pour démontrer l'inclusion réciproque, il suffit de remarquer que tout élément $k \in \mathbb{N}^*$ peut s'écrire sous la forme $k = h(2k-1)$ (ainsi : $k \in h\big(\mathbb{N}^*\big)$).
- Précision que l'inclusion : $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ (qui est équivalente à $h\big(\mathbb{N}^*\big) \subset \mathbb{N}^*$) est suffisante pour traiter cet exercice. Cela démontre que la v.a.r. Y est une v.a.r. discrète. Pour déterminer sa loi, on détermine donc les valeurs $\mathbb{P}\big([Y=k]\big)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (et non pas sa fonction de répartition F_Y).
- Dans cet exercice, il est demandé de démontrer que Y suit une loi géométrique. Cette précision, en plus de la remarque en fin de question ***1.b)***, autorise à ne pas traiter cette étape de recherche de $Y(\Omega)$. Toutefois, de manière générale, lorsqu'on demande de déterminer la loi d'une v.a.r. Y, il est vivement conseillé de commencer par préciser $Y(\Omega)$ car cela aide dans le reste de la rédaction.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([Y=k]\big) & = & \mathbb{P}\left(\left[\left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor = k\right]\right) & \\[2mm]
& = & \mathbb{P}\left(\left[k \ \leqslant \ \dfrac{X+1}{2} \ < \ k+1\right]\right) & \textit{(par définition de la fonction partie entière)} \\[2mm]
& = & \mathbb{P}\big(\left[\ 2k \ \leqslant \ X+1 \ < \ 2k+2 \ \right]\big) & \\[2mm]
& = & \mathbb{P}\big(\left[\ 2k-1 \ \leqslant \ X \ < \ 2k+1 \ \right]\big) & \\[2mm]
& = & \mathbb{P}\big(\left[\ X = 2k-1\ \right] \ \cup \ \left[\ X = 2k \ \right]\big) & \textit{(car } X \textit{ est à valeurs entières)} \\[2mm]
& = & \mathbb{P}\big(\left[\ X = 2k-1\ \right]\big) + \mathbb{P}\big(\left[\ X = 2k \ \right]\big) & \textit{(par incompatibilité)} \\[2mm]
& = & p\, q^{2k-2} + p\, q^{2k-1} & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{G}\,(p)\textit{)} \\[2mm]
& = & p\, q^{2k-2}\ (1+q) \ = \ p\,(1+q)\ \left(q^2\right)^{k-1} &
\end{array}$$

- Or : $p\,(1+q) \ = \ (1-q)\,(1+q) \ = \ 1-q^2$. Finalement :

$$\mathbb{P}\big([Y=k]\big) \ = \ (1-q^2)\ \left(q^2\right)^{k-1} \ = \ (1-q^2)\ \Big(1-(1-q^2)\Big)^{k-1}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } Y \hookrightarrow \mathcal{G}\,\big(1-q^2\big).}$$

Commentaire

- On rappelle qu'on appelle fonction partie entière (par défaut) la fonction suivante.

$$\begin{array}{ccccl} \lfloor \, . \, \rfloor & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ & & x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \ = \ \text{le plus grand entier } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n \leqslant x \end{array}$$

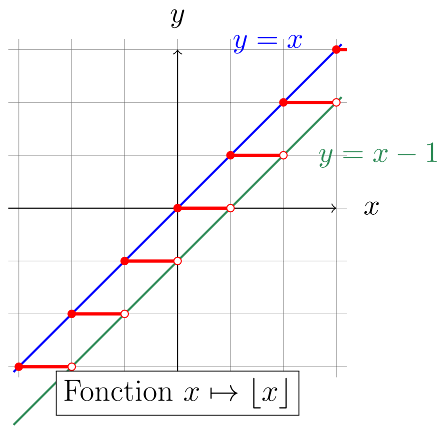
On peut aussi définir $\lfloor x \rfloor$ comme l'unique entier relatif vérifiant la propriété : $n \leqslant x < n+1$.

- Une propriété fondamentale provenant de la définition de cette fonction est donc :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \ (\lfloor u \rfloor = n \ \Leftrightarrow \ n \ \leqslant \ u \ < \ n+1)}$$

En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

- La représentation graphique de la fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ est la suivante :



Fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$

$\square$

b) Montrer que les variables aléatoires Y et $2Y - X$ sont indépendantes.

Démonstration.

- Notons $Z = 2Y - X$. On a : $2Y - X = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor - X$.

Notons $g : x \mapsto 2 \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor - x$, de sorte que : $Z = g(X)$.

On considère ici $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On en déduit :

$$Z(\Omega) \ = \ \big(g(X)\big)(\Omega) \ = \ g\big(X(\Omega)\big) \ = \ g\big(\mathbb{N}^*\big) \ = \ \{g(i) \mid i \in \mathbb{N}^*\}$$

Déterminons $g\big(\mathbb{N}^*\big)$. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Deux cas se présentent :

$\times$ si i est pair : alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $i = 2k$. Dans ce cas :

$$\begin{array}{rcl} g(i) & = & g(2k) \\ & = & 2 \left\lfloor \dfrac{2k+1}{2} \right\rfloor - 2k \\ & = & 2 \left\lfloor k + \dfrac{1}{2} \right\rfloor - 2k \\ & = & 2k - 2k \ = \ 0 \qquad \textit{(car } k \leqslant k + \frac{1}{2} < k+1\textit{)} \end{array}$$

× si i est pair : alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $i = 2k - 1$. Dans ce cas :

$$\begin{array}{rcl} g(i) & = & g(2k-1) \\ & = & 2 \left\lfloor \dfrac{(2k - \cancel{1}) + \cancel{1}}{2} \right\rfloor - (2k-1) \\ & = & 2 \ \lfloor k \rfloor - (2k-1) \\ & = & 2k - (2k-1) \ = \ 1 \end{array}$$

Ainsi la fonction g est définie par :

$$g : x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } x \text{ est impair} \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{On en déduit : } Z(\Omega) = g\big(X(\Omega)\big) = \{0,1\} \text{ et ainsi } Z \text{ suit une loi de Bernoulli.}}$

$\boxed{\text{De l'étude de } g\text{, on déduit aussi : } [2Y - X = 0] \ = \ [g(X) = 0] \ = \ [X \text{ prend une valeur paire}].}$

- Démontrons maintenant que Y et $2Y - X$ sont indépendantes.
  Soit $k \in Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  × D'une part :

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\big([Y = k] \ \cap \ [2Y - X = 0] \big) \\ = & \mathbb{P}\big([Y = k] \ \cap \ [X = 2Y] \big) \\ = & \mathbb{P}\big([Y = k] \ \cap \ [X = 2k] \big) \\ = & \mathbb{P}\Big(\Big[\left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor = k \Big] \ \cap \ [X = 2k] \Big) \\ = & \mathbb{P}\Big(\Big[\left\lfloor \dfrac{2k+1}{2} \right\rfloor = k \Big] \ \cap \ [X = 2k] \Big) \\ = & \mathbb{P}\Big(\Big[\left\lfloor k + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = k \Big] \ \cap \ [X = 2k] \Big) \\ = & \mathbb{P}\big([k = k] \ \cap \ [X = 2k] \big) \\ = & \mathbb{P}\big([X = 2k] \big) \ = \ p \, q^{2k-1} \qquad \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \end{array}$$

Commentaire

Pour comprendre l'écriture de l'événement $[k = k]$, on peut considérer que le premier k est la v.a.r. constante égale à k. Par définition des crochets d'événement :

$$[k = k] \ = \ \{\omega \in \Omega \mid k = k\} \ = \ \Omega$$

× D'autre part :

$$\mathbb{P}\big([Y=k]\big) \;=\; (1-q^2)\,\big(q^2\big)^{k-1}$$

et, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([2Y-X=0]\big) &= \mathbb{P}\big([X \text{ prend une valeur paire}]\big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} [X=2k]\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=2k]\big) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p\,q^{2k-1} \;=\; p \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-1} \\
&= pq \sum_{k=1}^{+\infty} \big(q^2\big)^{k-1} \\
&= pq \sum_{k=0}^{+\infty} \big(q^2\big)^{k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= pq\,\frac{1}{1-q^2}
\end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y=k]\big) \times \mathbb{P}\big([2Y-X=0]\big) &= (\cancel{1-q^2})\,\big(q^2\big)^{k-1} \times pq\,\frac{1}{\cancel{1-q^2}} \\
&= p\,q^{2k-1} \;=\; \mathbb{P}\big([Y=k] \,\cap\, [2Y-X=0]\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ les événements } [Y=k] \text{ et } [2Y-X=0] \text{ sont indépendants.}}$$

- Comme $(2Y-X)(\Omega) = \{0,1\}$, on a alors :

$$[2Y-X=1] \;=\; [2Y-X \neq 0] \;=\; \overline{[2Y-X=0]}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{D'après ce qui précède, pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ les événements } [Y=k] \\ \text{et } \overline{[2Y-X=0]} \text{ sont indépendants.}\end{array}}$$

Commentaire

- On rappelle que si A et B sont deux événements indépendants alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. Cette propriété peut être utilisée sans démonstration. On la rappelle ci-dessous pour la culture.
- Comme $\big(B, \overline{B}\big)$ est un système complet d'événements :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\big(A \cap B\big) + \mathbb{P}\big(A \cap \overline{B}\big) \\
&= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\big(A \cap \overline{B}\big) && \textit{(car } A \textit{ et } B \textit{ sont indépendants)}
\end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(A \cap \overline{B}\big) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \\
&= \mathbb{P}(A)\,\big(1 - \mathbb{P}(B)\big) \\
&= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}\big(\overline{B}\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Cela démontre que les v.a.r. } Y \text{ et } 2Y-X \text{ sont indépendantes.}}$$ □

Commentaire

- Rappelons que **les v.a.r. X et Y sont indépendantes** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \ = \ \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$$

  Autrement dit, les v.a.r. X et Y sont indépendantes si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants.

- Il était aussi possible de déterminer la loi de $2Y - X$ en procédant de manière plus systématique, c'est à dire en déroulant la méthode consistant à déterminer la loi d'une somme. Détaillons ce procédé.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big([2Y - X = 0] \big) \\
= \ & \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = j] \ \cap \ [2Y - X = 0] \big) \\
= \ & \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = j] \ \cap \ [2Y = j] \big) \\
= \ & \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X = j] \ \cap \ \left[Y = \tfrac{j}{2}\right] \right) \\
= \ & \sum_{\substack{j = 1 \\ j \text{ pair}}}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X = j] \ \cap \ \left[Y = \tfrac{j}{2}\right] \right) + \cancel{\sum_{\substack{j = 1 \\ j \text{ impair}}}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X = j] \ \cap \ \left[Y = \tfrac{j}{2}\right] \right)} \quad (*) \\
= \ & \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X = 2j] \ \cap \ \left[Y = \tfrac{\cancel{2}j}{\cancel{2}}\right] \right) \\
= \ & \sum_{j=1}^{+\infty} p \ q^{2j-1} \qquad \textit{(en reprenant la démonstration en bas de page 8)}
\end{aligned}$$

  $(*)$: pour tout j impair, $\left[Y = \frac{j}{2}\right] = \varnothing$ car Y est à valeurs entières.
  On retrouve alors la somme issue de la démonstration en début de page 9.