DM3 vB

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Soit $p \in \,]0,1[$ et $q = 1 - p$.

1. On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie.
On suppose qu'à chaque lancer la probabilité d'obtenir Pile est égale à p.
Dans la suite, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on notera :

× P_i : « Obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer ».

× F_i : « Obtenir Face au $i^{\text{ème}}$ lancer ».

On définit les variables aléatoires X_1 et X_2 de la façon suivante :

× X_1 prend la valeur k si le premier Pile de rang impair s'obtient au rang $2k - 1$ (entier qui représente le $k^{\text{ème}}$ nombre impair de $\mathbb{N}^*$) ;

× X_2 prend la valeur k si le premier Pile de rang pair s'obtient au rang $2k$ (entier qui représente le $k^{\text{ème}}$ nombre pair de $\mathbb{N}^*$).

Par exemple si l'on obtient (Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile) alors X_1 prend la valeur 4 et X_2 prend la valeur 1. De plus, si Pile n'apparaît à aucun rang impair (respectivement à aucun rang pair), on considère que X_1 prend la valeur 0 (respectivement X_2 prend la valeur 0).

a) Démontrer : $\mathbb{P}([X_1 = 0]) = \mathbb{P}([X_2 = 0]) = 0$.

b) Calculer $\mathbb{P}([X_1 = 1])$ et $\mathbb{P}([X_2 = 1])$.
Déterminer les lois de X_1 et de X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au minimum de X_1 et de X_2.

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

a) Montrer que la variable aléatoire $Y = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre *(on rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre x).*

b) Montrer que les variables aléatoires Y et $2Y - X$ sont indépendantes.