DM3 vA

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et suivant chacune la loi uniforme discrète sur $[\![1, N]\!]$.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $s_n(N) = \sum\limits_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$.

a) Montrer que la suite $(s_n(N))_{n\geqslant 1}$ est strictement monotone et convergente.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - Tout d'abord :

$$\begin{aligned} s_{n+1}(N) - s_n(N) &= \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \left(\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} - \left(\frac{k}{N}\right)^n\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \left(\frac{k}{N} - 1\right) \end{aligned}$$

  - Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$:

$$\begin{array}{lcr} \text{Comme} & 1 \leqslant k \leqslant N-1 & \\ \text{alors} & \dfrac{1}{N} \leqslant \dfrac{k}{N} \leqslant \dfrac{N-1}{N} & \textit{(car } N > 0\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{N} - 1 \leqslant \dfrac{k}{N} - 1 \leqslant \dfrac{N-1}{N} - 1 & \\ \text{ainsi} & \dfrac{k}{N} - 1 \leqslant -\dfrac{1}{N} < 0 & \end{array}$$

  De plus : $\left(\frac{k}{N}\right)^n > 0$. On en déduit :

$$\forall k \in [\![1, N-1]\!], \quad \left(\frac{k}{N}\right)^n \left(\frac{k}{N} - 1\right) \ < \ 0$$

  - Ainsi, en sommant les inégalités précédentes :

$$s_{n+1}(N) - s_n(N) \ < \ 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } \big(s_n(N)\big)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante.}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  On sait : $\forall k \in [\![1, N-1]\!]$, $\left(\dfrac{k}{N}\right)^n \geqslant 0$. Ainsi : $s_n(N) \geqslant 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n(N) \geqslant 0}$$

- On en déduit que la suite $\big(s_n(N)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est :
  - × décroissante,
  - × minorée par 0.

$$\boxed{\text{La suite } \big(s_n(N)\big)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge donc vers un réel } \ell \text{ tel que : } \ell \geqslant 0.}$$

Commentaire

- On prendra garde à ne pas confondre les suites $\big(s_n(N)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(s_n(N)\big)_{N\in\mathbb{N}^*}$.
- Il n'y a pas de sens ici à considérer la suite $\big(s_n(N)\big)_{N\in\mathbb{N}^*}$, puisque la variable N a été fixée au début de l'énoncé par la quantification : « **Soit** N un entier supérieur ou égal à 2 ». C'est d'ailleurs le fait que cette variable N soit fixée qui permet de définir des v.a.r. de loi $\mathcal{U}([\![1, N]\!])$.

□

b) Trouver sa limite.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$.

$$\begin{array}{cc} \text{Comme} & 1 \leqslant k \leqslant N-1 \\ \text{alors} & \dfrac{1}{N} \leqslant \dfrac{k}{N} \leqslant \dfrac{N-1}{N} \\ \text{d'où} & 0 \leqslant \dfrac{k}{N} < 1 \end{array}$$

  Comme $\dfrac{k}{N} \in\ ]-1, 1[$, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n = 0$.

- On obtient :

$$\begin{array}{rcl} s_n(N) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n \\ & = & \left(\dfrac{1}{N}\right)^n + \left(\dfrac{2}{N}\right)^n + \cdots + \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^n \end{array}$$

(chaque terme $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$)

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n\to+\infty} s_n(N) = 0.}$$

□

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $T_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

a) Calculer pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}([T_n = k])$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, N]\!]$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} [T_n \leqslant k] &= [\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant k] \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant k] \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([T_n \leqslant k]\big) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant k]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([X_i \leqslant k]\big) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([X_1 \leqslant k]\big) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ &= \Big(\mathbb{P}\big([X_1 \leqslant k]\big)\Big)^n \end{aligned}$$

- De plus :

$$[X_1 \leqslant k] = \bigcup_{i=1}^{k} [X_1 = i]$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_1 \leqslant k]\big) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} [X_1 = i]\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}\big([X_1 = i]\big) && \textit{(car les événements } [X_1 = 1], \dots, [X_1 = k] \textit{ sont deux à deux incompatibles)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{N} && \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])\textit{)} \\ &= \frac{k}{N} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}\big([T_n \leqslant k]\big) = \left(\frac{k}{N}\right)^n.}$$

Commentaire

Remarquons que cette égalité est vraie aussi pour $k = 0$. En effet :
- × d'une part : $[T_n \leqslant 0] = \varnothing$. Donc :

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant 0]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- × d'autre part : $\left(\dfrac{0}{n}\right)^n = 0$.

Ainsi : $\mathbb{P}([T_n \leqslant 0]) = \left(\dfrac{0}{n}\right)^n$.

- On sait de plus : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i(\Omega) = [\![1,N]\!]$ (car $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,N]\!])$).

$$\boxed{\text{On en déduit : } T_n(\Omega) \subset [\![1,N]\!].}$$

Soit $k \in [\![1,N]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} [T_n \leqslant k] & = & [T_n < k] \cup [T_n = k] & \\ & = & [T_n \leqslant k-1] \cup [T_n = k] & \textit{(car } T_n \textit{ est à valeurs entières)} \end{array}$$

Les événements $[T_n \leqslant k-1]$ et $[T_n = k]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}\big([T_n \leqslant k]\big) = \mathbb{P}\big([T_n \leqslant k-1]\big) + \mathbb{P}\big([T_n = k]\big)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in [\![1,N]\!],\ \mathbb{P}([T_n = k]) = \mathbb{P}([T_n \leqslant k]) - \mathbb{P}([T_n \leqslant k-1]).}$$

- Soit $k \in [\![1,N]\!]$.

$$\mathbb{P}([T_n = k]) = \mathbb{P}([T_n \leqslant k]) - \mathbb{P}([T_n \leqslant k-1])$$

Deux cas se présentent :

× si $k \in [\![2,N]\!]$, on obtient :

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant k]) - \mathbb{P}([T_n \leqslant k-1]) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n \quad \textit{(car } k \in [\![1,N]\!] \textit{ et } k-1 \in [\![1,N]\!]\textit{)}$$

× si $k = 1$, alors :

- d'une part :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T_n \leqslant 1]) - \mathbb{P}([T_n \leqslant 0]) & = & \left(\dfrac{1}{N}\right)^n - 0 & \textit{(car } T_n \subset [\![1,N]\!]\textit{)} \\ & = & \left(\dfrac{1}{N}\right)^n & \end{array}$$

- d'autre part :

$$\left(\frac{1}{N}\right)^n - \left(\frac{1-1}{N}\right)^n = \left(\frac{1}{N}\right)^n - 0 = \left(\frac{1}{N}\right)^n$$

La formule reste donc vraie pour $k = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![1,N]\!],\ \mathbb{P}([T_n = k]) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n.}$$

Commentaire

Si on avait remarqué plus tôt :

$$\forall k \in [\![0,N]\!], \quad \mathbb{P}([T_n \leqslant k]) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

alors la disjonction de cas n'était pas nécessaire.

□

b) Montrer que $\mathbb{E}(T_n) = N - s_n(N)$.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une espérance, car c'est une v.a.r. finie.
- On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n) &= \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}\big([T_n = k]\big) \\
&= \sum_{k=1}^{N} k \left(\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n\right) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{k-1}{N}\right)^n \\
&= \sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) \left(\frac{k}{N}\right)^n && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \left(\frac{k}{N}\right)^n + N\left(\frac{N}{N}\right)^n\right) - \left(\cancel{(0+1)\left(\frac{0}{N}\right)^n} + \sum_{k=1}^{N-1} (k+1)\left(\frac{k}{N}\right)^n\right) \\
&= N + \sum_{k=1}^{N-1} \big(k - (k+1)\big) \left(\frac{k}{N}\right)^n \\
&= N - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \\
&= N - s_n(N)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = N - s_n(N)}$$

□

3. a) Justifier que $\mathbb{P}\big([|T_n - N| \geqslant 1]\big)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\mathbb{P}\big([\ |T_n - N| \geqslant 1]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([\ |T_n - N| < 1]\big)$$

- Or :

$$\begin{aligned}
[\ |T_n - N| < 1] &= [-1 < T_n - N < 1] \\
&= [N - 1 < T_n < N + 1] \\
&= [N \leqslant T_n \leqslant N] && \textit{(car } T_n \textit{ est à valeurs entières)} \\
&= [T_n = N]
\end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big([\ |T_n - N| \geqslant 1] \big) & = & 1 - \mathbb{P}\big([T_n = N] \big) \\ & = & 1 - \left(\left(\dfrac{N}{N}\right)^n - \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^n \right) \quad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{)} \\ & = & \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^n \right) \\ & = & \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^n \end{array}$$

- De plus : $\dfrac{N-1}{N} \in\,]-1, 1[$. D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^n = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([\ |T_n - N| \geqslant 1] \big) = 0.}$$

□

b) En déduire, pour tout $\varepsilon > 0$, la limite de $\mathbb{P}([|T_n - N| \geqslant \varepsilon])$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux cas se présentent.

- Si $\varepsilon \in [1, +\infty[$.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Comme} & \varepsilon & \geqslant & 1 \\ \text{alors} & [\ |T_n - N| \geqslant \varepsilon] & \subset & [\ |T_n - N| \geqslant 1] \end{array}$$

  Par croissance de $\mathbb{P}$:

$$0 \ \leqslant\ \mathbb{P}\big([\ |T_n - N| \geqslant \varepsilon] \big) \ \leqslant\ \mathbb{P}\big([\ |T_n - N| \geqslant 1] \big)$$

  Or :

  × d'après la question précédente : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([\ |T_n - N| \geqslant 1] \big) = 0$,

  × $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$

  Par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([\ |T_n - N| \geqslant \varepsilon] \big) = 0$.

Commentaire

Détaillons la démonstration de l'inclusion : $[\ |T_n - N| \geqslant \varepsilon] \ \subset\ [\ |T_n - N| \geqslant 1]$.

Soit $\omega \in [\ |T_n - N| \geqslant \varepsilon]$. Alors : $|T_n(\omega) - N| \geqslant \varepsilon$.
Ainsi, par transitivité :

$$|T_n(\omega) - N| \ \geqslant\ \varepsilon\ \geqslant\ 1$$

D'où : $|T_n(\omega) - N| \geqslant 1$. Ainsi : $\omega \in [\ |T_n - N| \geqslant 1]$.
On en déduit :

$$[\ |T_n - N| \geqslant \varepsilon] \ \subset\ [\ |T_n - N| \geqslant 1]$$

- Si $\varepsilon \in \,]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme T_n est à valeurs entières :

$$[|T_n - N| \geqslant \varepsilon] \;=\; [|T_n - N| \geqslant 1]$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([|T_n - N| \geqslant \varepsilon]) \;=\; \mathbb{P}([|T_n - N| \geqslant 1]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|T_n - N| \geqslant \varepsilon]) = 0.}$$

Commentaire

- On aurait pu éviter la disjonction de cas en remarquant directement :

$$[\ |T_n - N| \geqslant \varepsilon] \;\subset\; [\ |T_n - N| \geqslant 1] \qquad \textit{(car } T_n \textit{ est à valeurs entières)}$$

- On démontre en fait dans cet exercice que la suite de v.a.r. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers N (ou encore que T_n est un estimateur convergent de N).
- Cette notion de convergence en probabilité sera abordée plus tard dans l'année. En voici tout de même la définition.
On dit que la suite de v.a.r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers un réel θ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon]) \;=\; 0$$

$\square$