DM3 vA

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et suivant chacune la loi uniforme discrète sur $[\![1, N]\!]$.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $s_n(N) = \sum\limits_{k=1}^{N-1} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$.

a) Montrer que la suite $(s_n(N))_{n\geqslant 1}$ est strictement monotone et convergente.

b) Trouver sa limite.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $T_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Calculer pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}([T_n = k])$.

b) Montrer que $\mathbb{E}(T_n) = N - s_n(N)$.

3. a) Justifier que $\mathbb{P}([|T_n - N| \geqslant 1])$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

b) En déduire, pour tout $\varepsilon > 0$, la limite de $\mathbb{P}([|T_n - N| \geqslant \varepsilon])$ quand n tend vers l'infini.