DM2 vB correction

Soit a un nombre réel strictement positif.
On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont *tous* les termes sont strictement positifs, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\left\{\begin{array}{rcl} w_n & = & \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \dfrac{a}{n} \\[2ex] \ell_n & = & \ln\left(n^a\, u_n\right) \end{array}\right.$$

On suppose que la *série* de terme général w_n est absolument convergente.

1. Soit $f : t \mapsto \ln(1+t) - t$.

a) Préciser le domaine de définition de f et donner un équivalent simple de cette fonction au voisinage de 0.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} f(t) \text{ bien défini} & \Leftrightarrow & \ln(1+t) \text{ bien défini} \\ & \Leftrightarrow & 1+t>0 \\ & \Leftrightarrow & t > -1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathcal{D}_f \ = \,]-1,+\infty[.}$$

- Tout d'abord : $\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$.
  Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} f(t) & = & \ln(1+t) - t \\ & = & \cancel{t} - \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2) - \cancel{t} \\ & = & -\dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } f(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{t^2}{2}.}$$

□

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est convergente.

Démonstration.

- D'après la question précédente, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2} = -\frac{1}{2\,n^2}$$

- On obtient alors :
  - $\times$ $-f\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n^2}$
  - $\times$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2n^2} > 0$
  - $\times$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 $(2 > 1)$. Elle est donc convergente.

    Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n^2}$ (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul).

  Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(-f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{n\geqslant 1} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

On rappelle que les critères de comparaison / équivalence / négligeabilité s'appliquent uniquement sur des séries **à termes positifs**. C'est pourquoi, dans cette question, on démontre d'abord la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(-f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ pour pouvoir conclure quant à la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (qui est une série à termes négatifs).

☐

2. Démontrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{w_n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} (w_n)^2$ sont convergentes.

Démonstration.

- La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{w_n}{n}$ n'est ni une série à termes positifs, ni une série à termes négatifs. On va donc démontrer que cette série est absolument convergente pour conclure ensuite qu'elle est convergente.
  - $\times$ Tout d'abord, comme $n \geqslant 1$:
  $$\left|\frac{w_n}{n}\right| = \frac{|w_n|}{n} \leqslant |w_n|$$
  - $\times$ On obtient :
    - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \left|\dfrac{w_n}{n}\right| \leqslant |w_n|$
    - la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} |w_n|$ est convergente, car d'après l'énoncé, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ est absolument convergente.

  Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left|\dfrac{w_n}{n}\right|$ est convergente, *i.e.* la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{w_n}{n}$ est absolument convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{w_n}{n} \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

- On utilise ici l'implication suivante :

$$\sum u_n \text{ absolument convergente} \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ convergente}$$

- **La réciproque est fausse.**

$$\sum u_n \text{ convergente} \quad \cancel{\Rightarrow} \quad \sum u_n \text{ absolument convergente}$$

Un contre-exemple classique est la série harmonique alternée $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$:

× cette série est convergente (démontré dans le cours à l'aide du théorème des suites adjacentes)

× cette série n'est pas absolument convergente : la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \left| \dfrac{(-1)^n}{n} \right|$ est la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, série de Riemann d'exposant 1 ($1 \cancel{>} 1$), qui est divergente.

- Montrons que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (w_n)^2$ est convergente.

× Tout d'abord, comme la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} |w_n|$ est convergente, on en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} |w_n| = 0$.
Ainsi, à partir d'un certain rang : $|w_n| \leqslant 1$. Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \ |w_n| \leqslant 1$$

× Soit $n \geqslant n_0$. Comme $|w_n| \leqslant 1$ et $|w_n| \geqslant 0$:

$$\begin{array}{ccccc} & & |w_n| \times |w_n| & \leqslant & |w_n| \times 1 \\ & & \shortparallel & & \shortparallel \\ (w_n)^2 & = & |w_n|^2 & & |w_n| \end{array}$$

× On obtient :

- $\forall n \geqslant n_0$, $0 \ \leqslant \ (w_n)^2 \ \leqslant \ |w_n|$
- la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} |w_n|$ est convergente.

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} (w_n)^2$ est convergente.

Il en est de même de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (w_n)^2$ (on ne change pas la nature d'une série en lui ajoutant un nombre fini de termes).

$$\boxed{\text{La série } \sum\limits_{n \geqslant 1} (w_n)^2 \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

- On utilise ici l'implication suivante :

$$\sum u_n \text{ convergente} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

- **La réciproque est fausse.**

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \quad \not\Rightarrow \quad \sum u_n \text{ convergente}$$

Un contre-exemple classique est la série harmonique $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$:

× on a bien : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

× mais la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ est la série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$), qui est divergente.

□

3. a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\ell_{n+1} - \ell_n \;=\; f\left(w_n - \frac{a}{n}\right) + w_n + a\, f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'une part :

$$\begin{aligned}
\ell_{n+1} - \ell_n &= \ln\big((n+1)^a\, u_{n+1}\big) - \ln(n^a\, u_n) && \textit{(par définition de } \ell_n\textit{)}\\
&= a\, \ln(n+1) + \ln(u_{n+1}) - \big(a\, \ln(n) + \ln(u_n)\big)\\
&= a\,\big(\ln(n+1) - \ln(n)\big) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\\
&= a\, \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)
\end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
& f\left(w_n - \frac{a}{n}\right) + w_n + a\, f\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= \left(\ln\left(1 + w_n - \frac{a}{n}\right) - \left(\cancel{w_n} - \frac{a}{n}\right)\right) + \cancel{w_n} + a\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) && \textit{(par définition de } f\textit{)}\\
&= \ln\left(\cancel{1} + \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \cancel{1} + \cancel{\frac{a}{n}}\right) - \cancel{\frac{a}{n}}\right) + \cancel{\frac{a}{n}} + a\, \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \cancel{\frac{a}{n}}\\
&= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) + a\, \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ell_{n+1} - \ell_n \;=\; f\left(w_n - \frac{a}{n}\right) + w_n + a\, f\left(\frac{1}{n}\right)}$$

□

b) En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\ell_{n+1} - \ell_n)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ell_{n+1} - \ell_n = f\left(w_n - \dfrac{a}{n}\right) + w_n + a\, f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
  Or :
  $\times$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ est convergente (car absolument convergente),
  $\times$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est convergente d'après la question ***1.b)***
  Il reste donc à montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f\left(w_n - \dfrac{a}{n}\right)$ est convergente pour conclure quant à la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\ell_{n+1} - \ell_n)$.
- D'après la démonstration de la question ***2.*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n - \dfrac{a}{n} = 0$.
  On en déduit, d'après la question ***1.a)*** :
  $$f\left(w_n - \frac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\left(w_n - \frac{a}{n}\right)^2}{2}$$
  Or :
  $$\left(w_n - \frac{a}{n}\right)^2 = (w_n)^2 - 2a\,\frac{w_n}{n} + a^2\,\frac{1}{n^2}$$
  De plus :
  $\times$ les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} (w_n)^2$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{w_n}{n}$ sont convergentes, d'après la question ***2.***,
  $\times$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

  > Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(w_n - \dfrac{a}{n}\right)^2$ est convergente en tant que combinaison linéaire de séries convergentes.

- On obtient :
  $\times$ $-f\left(w_n - \dfrac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\left(w_n - \frac{a}{n}\right)^2}{2}$
  $\times$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\left(w_n - \frac{a}{n}\right)^2}{2} \geqslant 0$
  $\times$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(w_n - \dfrac{a}{n}\right)^2$ est convergente.
  Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2}\left(w_n - \dfrac{a}{n}\right)^2$ (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul).
  Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(-f\left(w_n - \dfrac{a}{n}\right)\right)$ est convergente.

  > On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f\left(w_n - \dfrac{a}{n}\right)$ est convergente.

> Finalement, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\ell_{n+1} - \ell_n)$ est convergente en tant que combinaison linéaire de séries convergentes.

□

4. a) Justifier la convergence de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 2$.
  En reconnaissant une somme télescopique :
  $$\sum_{k=1}^{n-1} (\ell_{k+1} - \ell_k) \ = \ \ell_n - \ell_1$$
  Ainsi : $\ell_n \ = \ \ell_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (\ell_{k+1} - \ell_k)$.
- Or, d'après la question précédente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\ell_{n+1} - \ell_n)$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

L'équivalence :
$$(u_n) \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$
n'est pas un résultat au programme, mais sa démonstration est très classique et donc à connaître.

□

b) En déduire l'existence d'un réel $A > 0$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^a}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la suite (ℓ_n) converge vers un réel ℓ.
  Ainsi, par définition de (ℓ_n) :
  $$\lim_{n\to+\infty} \ln(n^a\, u_n) \ = \ \ell$$
- Par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a\, u_n \ = \ \mathrm{e}^{\ell}$.
  D'où, comme $\mathrm{e}^{\ell} \neq 0$:
  $$n^a\, u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\ell}$$
  On en déduit : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{\ell}}{n^a}$.

$$\boxed{\text{Finalement, en posant } A = \mathrm{e}^{\ell} > 0, \text{ on obtient : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^a}.}$$

□

5. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$.

Démonstration.
On commence par introduire la suite (u_n) définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n \;=\; \frac{2\times 4\times\cdots\times(2n)}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}$$

On cherche donc à déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

Sous réserve d'être dans le cadre fourni par le début de l'énoncé, on peut obtenir l'équivalent :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^a}$$

où a serait un réel à déterminer.
La démarche de résolution de cette question sera donc la suivante :

1) déterminer un réel a tel que la suite (u_n) vérifie les deux hypothèses du début de l'énoncé :
- la suite (u_n) est à termes strictement positifs,
- la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} w_n$ est absolument convergente, où :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad w_n \;=\; \frac{u_{n+1}}{u_n}-1+\frac{a}{n}$$

2) en déduire un équivalent de (u_n) de la forme : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^a}$,

3) utiliser le critère d'équivalence des séries à termes positifs pour conclure quant à la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1) Cherchons un réel a pour que la suite (u_n) vérifie les hypothèses de l'énoncé.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$u_n \;=\; \frac{2\times 4\times\cdots\times(2n)}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)} \;>\; 0$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>0}$$

- Soit $a\in\mathbb{R}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
w_n &= \frac{u_{n+1}}{u_n}-1+\frac{a}{n}\\
&= \frac{\dfrac{\cancel{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\times\big(2(n+1)\big)}{\cancel{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}\times\big(2(n+1)+1\big)}}{\dfrac{\cancel{2\times 4\times\cdots\times(2n)}}{\cancel{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}}}-1+\frac{a}{n}\\
&= \frac{2n+2}{2n+3}-1+\frac{a}{n}\\
&= \frac{2n+2}{2n+3}-\frac{2n+3}{2n+3}+\frac{a}{n}\\
&= -\frac{1}{2n+3}+\frac{a}{n}
\end{aligned}$$

× Rappelons qu'on cherche un réel a tel que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ est absolument convergente.

Pour cela on va procéder de la manière classique suivante :

a. déterminer un équivalent de (w_n),

b. utiliser le critère d'équivalence des séries à termes positifs pour conclure quant à la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$w_n \ = \ -\frac{1}{2n+3} + \frac{a}{n} \ = \ -\frac{n}{n(2n+3)} + \frac{a(2n+3)}{n(2n+3)} \ = \ \frac{(2a-1)n+3a}{n(2n+3)}$$

Pour déterminer un équivalent de (w_n), deux cas se présentent :

- si $2a-1 \neq 0$, *i.e.* $a \neq \frac{1}{2}$, alors :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2a-1)\cancel{n}}{\cancel{n}(2n+3)} = \frac{2a-1}{n}$$

Deux cas se présentent encore :

▸ si $2a-1>0$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2a-1}{n} > 0$.
On obtient alors :
× $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2a-1}{n}$,
× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2a-1}{n} > 0$,
× la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$). Elle est donc divergente.
Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2a-1}{n}$.

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ est divergente, et donc, en particulier, n'est pas absolument convergente.

▸ si $2a-1<0$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2a-1}{n} < 0$.
Avec le même raisonnement que précédemment appliqué à la suite $(-w_n)$, on obtient également que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ n'est pas absolument convergente.

- si $2a-1=0$, *i.e.* $a = \frac{1}{2}$, alors :

$$w_n = \frac{3\ \frac{1}{2}}{n(2n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{3}{2}}{2n^2} = \frac{3}{4}\ \frac{1}{n^2}$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n \geqslant 0$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|w_n| = w_n$.

On obtient alors :

× $|w_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{4}\,\dfrac{1}{n^2}$,

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{3}{4}\,\dfrac{1}{n^2} > 0$,

× la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} |w_n|$ est convergente, c'est-à-dire la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ est absolument convergente.

$$\boxed{\text{Finalement, en choisissant } a = \frac{1}{2}, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} w_n \text{ est absolument convergente.}}$$

$$\boxed{\text{En choisissant } a = \frac{1}{2}, \text{ la suite } (u_n) \text{ vérifie les hypothèse de l'énoncé.}}$$

2) On choisit alors $a = \dfrac{1}{2}$. D'après les questions précédentes, il existe $A > 0$ tel que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^{\frac{1}{2}}}$$

3) On obtient alors :

× $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^{\frac{1}{2}}}$,

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$,

× la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ est une série de Riemann d'exposant $\dfrac{1}{2}$ ($\dfrac{1}{2} \cancel{>} 1$). Elle est donc divergente.

Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{A}{n^{\frac{1}{2}}}$.

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{2\cdot 4 \cdots (2n)}{1\cdot 3 \cdots (2n+1)} \text{ est divergente.}}$$

Commentaire

- On pouvait aussi remarquer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 &= -\frac{1}{2n+3} = -\frac{1}{2n} \times \frac{2n}{2n+3} \\ &= -\frac{1}{2n}\left(1 - \frac{3}{2n+3}\right) \\ &= -\frac{1}{2n} + \frac{3}{2n(2n+3)}\end{aligned}$$

  Ainsi, on pouvait repérer directement qu'en choisissant $a = \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}w_n &= \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{a}{n} \\ &= -\cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{3}{2n(2n+3)} + \cancel{\frac{1}{2n}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{4n^2}\end{aligned}$$

  On peut ensuite reprendre la démonstration précédente avec l'utilisation du critère d'équivalence des séries à termes positifs.

- Ce calcul peut sembler « sorti du chapeau » mais il correspond en fait à une idée commune lors de la recherche d'équivalent : une mise en facteur du « terme dominant ».
  Ici, le terme dominant du quotient $-\dfrac{1}{2n+3}$, lorsque n tend vers $+\infty$, est bien $-\dfrac{1}{2n}$.

□