DM2 vB

Soit a un nombre réel strictement positif.
On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont *tous* les termes sont strictement positifs, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\left\{\begin{array}{lcl} w_n & = & \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \dfrac{a}{n} \\[2ex] \ell_n & = & \ln\left(n^a\, u_n\right) \end{array}\right.$$

On suppose que la *série* de terme général w_n est absolument convergente.

1. Soit $f : t \mapsto \ln(1+t) - t$.

a) Préciser le domaine de définition de f et donner un équivalent simple de cette fonction au voisinage de 0.

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est convergente.

2. Démontrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{w_n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} (w_n)^2$ sont convergentes.

3. ***a)*** Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\ell_{n+1} - \ell_n \;=\; f\left(w_n - \frac{a}{n}\right) + w_n + a\, f\left(\frac{1}{n}\right)$$

b) En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\ell_{n+1} - \ell_n)$.

4. ***a)*** Justifier la convergence de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) En déduire l'existence d'un réel $A > 0$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^a}$.

5. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$.