DM2 vA correction (EML 2019)

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in\,]0,+\infty[,\ f(t) = t + \frac{1}{t}$$

PARTIE A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme $f = f_1 + f_2$ où :
  - × $f_1 : t \mapsto t$ dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que fonction polynomiale,
  - × $f_2 : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ dérivable sur $]0,+\infty$ en tant qu'inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
- Soit $t \in\,]0,+\infty[$.

$$f'(t) \ = \ 1 - \frac{1}{t^2}$$

  De plus :

$$\begin{array}{rcll} f'(t) \geqslant 0 & \Leftrightarrow & 1 - \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0 & \\[2ex] & \Leftrightarrow & 1 \geqslant \dfrac{1}{t^2} & \\[2ex] & \Leftrightarrow & 1 \leqslant t^2 & \textit{(par stricte décroissance de la fonction } t \mapsto \frac{1}{t} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\[2ex] & \Leftrightarrow & 1 \leqslant t & \textit{(par stricte croissance de la fonction } t \mapsto \sqrt{t} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

- On obtient alors le tableau de variations suivant :

t	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau :
  - × $f(1) \ = \ 1 + \dfrac{1}{1} \ = \ 2.$
  - × comme $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t} = +\infty$, alors : $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = +\infty$.
  - × comme $\lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{1}{t} = 0$, alors : $\lim\limits_{t\to +\infty} f(t) = +\infty$.

□

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.

Démonstration.
D'après la question précédente, la fonction f est :

× continue (car dérivable) sur $[1,+\infty[$,

× strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

Ainsi, la fonction f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f\big([1,+\infty[\big)$ avec :

$$f\big([1,+\infty[\big) \;=\; \left[f(1), \lim_{t\to+\infty} f(t)\right[\;=\; [2,+\infty[$$

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } f \text{ réalise une bijection de } [1,+\infty[\text{ sur } [2,+\infty[.}$$

□

On note $g : [2,+\infty[\to [1,+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1,+\infty[$.

3. a) Dresser le tableau de variations de g.

Démonstration.
D'après le théorème de la bijection, la fonction $g = \Big(f_{|[1,+\infty[}\Big)^{-1} : [2,+\infty[\to [1,+\infty[$ est :

× continue sur $[2,+\infty[$,

× strictement monotone sur $[2,+\infty[$ et de même sens de variation que f sur $[1,+\infty[$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

t	2 $\qquad$ $+\infty$
Variations de g	$1 \nearrow +\infty$

Commentaire

- Rappelons que si $f : E \to F$ est une application définie sur un ensemble E et à valeurs dans un ensemble F, la **restriction** de f à l'ensemble A, notée $f_{|A}$, est l'application de A dans F définie par :
$$f_{|A} \; : \; \begin{array}{rcl} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$
- Autrement dit, $f_{|A}$ est l'application définie sur A par : $\boxed{\forall x \in A,\ f_{|A}(x) \;=\; f(x)}$

□

b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2,+\infty[$.

Démonstration.
La fonction f est :

× dérivable sur $g\big(]2,+\infty[\big) =]1,+\infty[$ (d'après ***1.***),

× de dérivée ne s'annulant pas sur $g\big(]2,+\infty[\big) =]1,+\infty[$.
En effet, on a démontré en question ***1.*** : $\forall t \in]1,+\infty[$, $f'(t) > 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } g \text{ est dérivable sur }]2,+\infty[\\ \left(\text{et de dérivée définie par : } \forall t \in]2,+\infty[,\ g'(t) = \dfrac{1}{f'(g(t))}\right).\end{array}}$$

Commentaire

- La notation de l'énoncé rend un peu difficile la bonne lecture de cette question. Si on note $h = f_{|[1,+\infty[}$, on met en avant que la question consiste à établir la régularité de la réciproque h^{-1} (avec les notations de l'énoncé, $g = h^{-1}$). On doit donc utiliser le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques.
- Si $h : I \to J$ (où I et J sont des intervalles), ce théorème, sous les bonnes hypothèses, permet d'établir la formule :

$$\forall t \in J,\ \big(h^{-1}\big)'(t) \ = \ \frac{1}{h'\big(h^{-1}(t)\big)}$$

que l'on pourra retenir sous la forme : $\boxed{\big(h^{-1}\big)' \ = \ \dfrac{1}{h' \circ h^{-1}}}$.

Les hypothèses du théorème sont celles qui rendent licites l'écriture de cette formule :
  - × la fonction h doit être dérivable sur $h^{-1}(J)$ afin que la quantité $h\big(h^{-1}(t)\big)$ ait du sens pour tout $t \in J$.
  - × la fonction h' ne doit pas s'annuler sur $h^{-1}(J)$ afin que la quantité $h\big(h^{-1}(t)\big)$ soit non nulle pour tout $t \in J$.
- On peut retrouver cette formule via l'égalité : $h \circ h^{-1} = \text{id}_J$.

En dérivant formellement cette égalité, on obtient : $(f' \circ g) \times g' \ = \ 1$.

(la dérivée de la fonction identité $\text{id}_J : t \mapsto t$ *est la fonction constante égale à* 1*)*

☐

c) Soit $y \in [2, +\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in \,]0, +\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

Démonstration.
Soit $y \in [2, +\infty[$. Soit $t \in \,]0, +\infty[$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} f(t) = y \quad & \Leftrightarrow \quad t + \frac{1}{t} = y \\ & \Leftrightarrow \quad t^2 + 1 = y\,t \qquad \textit{(car } t \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad t^2 - y\,t + 1 = 0 \end{aligned}$$

- On note $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par : $P(X) = X^2 - y\,X + 1$.
  - Calculons le discriminant du polynôme P :

$$\Delta \ = \ (-y)^2 - 4 \times 1 \times 1 \ = \ y^2 - 4$$

  Comme $y \geqslant 2$, alors, par croissance de la foncion $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$: $y^2 \geqslant 4$. Ainsi : $\Delta \geqslant 0$.
  - Distinguons les cas suivant le nombre de racines de P. Deux cas se présentent alors :
    × si $\Delta > 0$ (*i.e.* si $y > 2$), alors P admet exactement deux racines notées r_1 et r_2 :

$$r_1 = \frac{-(-y) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-(-y) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } y > 2, \text{ l'équation } f(t) = y \text{ admet exactement deux solutions :} \\ r_1 = \dfrac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \dfrac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}. \end{array}}$$

× si $\Delta = 0$ (*i.e.* si $y = 2$), alors P admet exactement une racine notée r_0 :

$$r_0 \;=\; \frac{-(-y)}{2 \times 1} \;=\; \frac{y}{2} \;=\; \frac{2}{2} \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{Si } y = 2, \text{ l'équation } f(t) = y \text{ admet une unique solution : } r_0 = 1.}$$

Commentaire

Remarquons que, pour $y = 2$, r_1 et r_2 prennent la valeur 1. Les expressions de r_0, r_1 et r_2 coïncident donc en $y = 2$.

- Comme g est la bijection réciproque de la restriction de f à $[1, +\infty[$, pour tout $y \in [2, +\infty[$ et tout $t \in [1, +\infty[$:
$$g(y) = t \quad \Leftrightarrow \quad f\big(g(y)\big) = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(t)$$
On en déduit que, pour tout $y \in [2, +\infty[$, $g(y)$ est la solution de l'équation $f(t) = y$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
Soit $y \in [2, +\infty[$. Deux cas se présentent donc :
× si $y > 2$, alors on cherche à déterminer quelle solution de r_1 ou de r_2 appartient à $[1, +\infty[$.
  - Tout d'abord :
$$\begin{aligned} r_1 \geqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \quad y - \sqrt{y^2 - 4} \geqslant 2 \\ &\Leftrightarrow \quad y - 2 \geqslant \sqrt{y^2 - 4} \\ &\Leftrightarrow \quad (y-2)^2 \geqslant y^2 - 4 \qquad \textit{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } [0, +\infty[, \textit{ et } y \geqslant 2) \\ &\Leftrightarrow \quad \cancel{y^2} - 4y + 4 \geqslant \cancel{y^2} - 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 8 \geqslant 4y \quad \Leftrightarrow \quad 2 \geqslant y \end{aligned}$$
  Or cette dernière inégalité est fausse (on a supposé $y > 2$), donc, par équivalence : $r_1 < 1$.
  - Ensuite : $\sqrt{y^2 - 4} \geqslant 0$. Donc, comme $y \geqslant 2$: $y + \sqrt{y^2 - 4} \geqslant 2$.
  Ainsi : $r_2 = \dfrac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2} \geqslant 1$.
$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } y \in \,]2, +\infty[, \ g(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.}$$
× si $y = 2$, alors $g(y) = r_0 = 1$.
$$\boxed{\text{On en déduit : } g(2) = 1.}$$
.

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Comme les expressions de } r_0 \text{ et de } r_2 \text{ coïncident en 2, on obtient finalement :} \\ g : y \mapsto \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.\end{gathered}}$$

□

PARTIE B : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2\, u_n} = \frac{1}{n}\, f(n\, u_n)$$

8. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \left\{\begin{array}{l} u_n \text{ existe} \\ u_n \geqslant 1 \end{array}\right.$.

- **Initialisation** :
  D'après l'énoncé : $u_1 = 1$. Donc : $u_1 \geqslant 1$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} \text{ existe} \\ u_{n+1} \geqslant 1 \end{array}\right.$)
  Par hypothèse de récurrence, le réel u_n existe et $u_n \geqslant 1$.
  - Comme $u_n \geqslant 1 > 0$ et $n > 0$, alors : $n\, u_n > 0$.
    Or f est définie sur $]0, +\infty[$, donc le réel $f(n\, u_n)$ existe.
    On en déduit que u_{n+1} existe.
  - Ensuite :

$$\begin{array}{llcll} & u_n & \geqslant & 1 & \\ \text{donc} & n\, u_n & \geqslant & n & \textit{(car } n > 0\textit{)} \\ \text{d'où} & f(n\, u_n) & \geqslant & f(n) & \textit{(par croissance de } f \textit{ sur } [1, +\infty[\textit{,} \\ & & & & \textit{et } n\, u_n \geqslant n \geqslant 1\textit{)} \\ \text{ainsi} & \dfrac{1}{n}\, f(n\, u_n) & \geqslant & \dfrac{1}{n}\, f(n) & \textit{(car } \dfrac{1}{n} > 0\textit{)} \end{array}$$

    On en déduit : $u_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{n}\, f(n)$. Or :

$$\frac{1}{n}\, f(n) \ = \ \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{n}\right) \ = \ 1 + \frac{1}{n^2} \ \geqslant \ 1$$

    Ainsi, par transitivité : $u_{n+1} \ \geqslant \ \dfrac{1}{n}\, f(n) \ \geqslant \ 1$.
    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

Commentaire

Cette question est un classique des suites récurrentes. Elle se traite presque toujours par récurrence.

□

9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
1 function u = suite(n)
2   u = 1
3   for k = .................
4     u = .................
5   end
6 endfunction
```

Démonstration.

```
1 function u = suite(n)
2   u = 1
3   for k = 1:(n-1)
4     u = (1/k) * (k*u + 1/(k*k))
5   end
6 endfunction
```

Détaillons l'obtention de ce programme.
La variable u est crée pour contenir successivement les valeurs u_1, ..., u_n.

- On initialise donc cette variable à $u_1 = 1$ avec la ligne 2.

```
2   u = 1
```

- On met ensuite à jour u à l'aide d'une structure itérative (boucle for) avec les lignes 3 à 5.

```
3   for k = 1:(n-1)
4     u = (1/k) * (k*u + 1/(k*u))
5   end
```

Commentaire

- On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Scilab**. Cependant, l'écriture du script démontre la compréhension de toutes les commandes en question et permet sans doute d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- On pouvait également coder la fonction f dans un script à part. On aurait alors obtenu les deux programmes suivants :

```
1 function y=f(t)
2   y = t + 1/t
3 endfunction
```

```
1 function u=suite(n)
2   u = 1
3   for k = 1:(n-1)
4     u = (1/k) * f(k*u)
5   end
6 endfunction
```

□

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$v_n = u_{n+1} - u_n = \cancel{u_n} + \frac{1}{n^2\,u_n} - \cancel{u_n} = \frac{1}{n^2\,u_n}$$

- D'après la question précédente : $u_n \geqslant 1 > 0$. Donc : $v_n = \dfrac{1}{n^2\,u_n} \geqslant 0$.
- Toujours d'après la question précédente :

$$\begin{array}{llll} & u_n & \geqslant & 1 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{u_n} & \leqslant & 1 \quad \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{n^2\,u_n} & \leqslant & \dfrac{1}{n^2} \quad \textit{(car } \dfrac{1}{n^2} > 0\textit{)} \\ \text{ainsi} & v_n & \leqslant & \dfrac{1}{n^2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}.}$$

□

b) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

× la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 $(2 > 1)$. Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série } \sum_{n \geqslant 1} v_n \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

La seule difficulté de cette démonstration réside dans la rédaction du critère des séries à termes positifs (les arguments à utiliser ont tous été démontrés dans les questions précédentes). C'est donc une question d'application directe du cours qu'il convient de savoir traiter.

□

c) Calculer, pour tout n supérieur ou égal à 2, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 2$. Par sommation télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k \ = \ \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \ = \ u_{(n-1)+1} - u_1 \ = \ u_n - 1$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{n-1} v_k = u_n - 1}$$

- Soit $n \geqslant 2$. D'après ce qui précède :

$$u_n \ = \ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$$

Or, d'après la question précédente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente.
On déduit de l'écriture précédente de u_n que la suite (u_n) est convergente, de limite :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \ = \ 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ converge vers un réel noté } \ell.}$$

□

11. a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k^2} \ \leqslant \ \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{t^2}\, dt$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 2$.

- Soit $t \in [k-1, k]$.

$$\begin{array}{lccccc} \text{Comme} & k-1 & \leqslant & t & \leqslant & k \\ \text{alors} & \dfrac{1}{(k-1)^2} & \geqslant & \dfrac{1}{t^2} & \geqslant & \dfrac{1}{k^2} \end{array} \quad \textit{(par décroissance de la fonction } t \mapsto \dfrac{1}{t^2} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue sur le segment $[k-1, k]$.
  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(k-1 \leqslant k)$:

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{(k-1)^2}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{t^2}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{k^2}\, dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ \big(k-(k-1)\big)\dfrac{1}{(k-1)^2} & & & & \big(k-(k-1)\big)\dfrac{1}{k^2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{En particulier, pour tout } k \geqslant 2 : \dfrac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{t^2}\, dt.}$$

□

b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\sum\limits_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \ \leqslant \ u_n - u_p \ \leqslant \ \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} \ dt$$

Démonstration.
Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $2 \leqslant p < n$.

- Tout d'abord, par sommation télescopique :

$$\sum_{k=p}^{n-1} v_k \ = \ \sum_{k=p}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \ = \ u_{(n-1)+1} - u_p \ = \ u_n - u_p$$

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n-1} v_k \ = \ u_n - u_p}$$

- Soit $k \geqslant 2$.
  - D'après la question ***10.a)*** : $0 \ \leqslant \ v_k \ \leqslant \ \dfrac{1}{k^2}$.
  - D'après la question précédente, on obtient par transitivité :

$$0 \ \leqslant \ v_k \ \leqslant \ \frac{1}{k^2} \ \leqslant \ \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2} \ dt$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, \ 0 \ \leqslant \ v_k \ \leqslant \ \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2} \ dt}$$

- On obtient, par sommation :

$$0 \ \leqslant \ \sum_{k=p}^{n-1} v_k \ \leqslant \ \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2} \ dt \ = \ \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} \ dt \qquad \textit{(par relation de Chasles)}$$

Ainsi, d'après ce qui précède, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $2 \leqslant p < n$:

$$\boxed{0 \ \leqslant \ u_n - u_p \ \leqslant \ \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} \ dt.}$$

Commentaire

Les questions ***11.a)*** et ***11.b)*** sont en fait une comparaison série-intégrale dont on rappelle le résultat ci-dessous.

- On considère une fonction $f : [0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ continue sur $[0, +\infty[$.
- On suppose de plus que f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(k) \ \leqslant \ \int_{k-1}^{k} f(t) \ dt \ \leqslant \ f(k-1)$$

  On en déduit par sommation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} f(k) \ \leqslant \ \int_{0}^{n} f(t) \ dt \ \leqslant \ \sum_{k=1}^{n} f(k-1)$$

□

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2, 3]$.

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 3$. On applique le résultat de la question précédente avec $p = 2$ (on a bien : $2 \leqslant p < n$) :

$$0 \ \leqslant \ u_n - u_2 \ \leqslant \ \int_1^{n-1} \frac{1}{t^2} \, dt$$

Or :

$$\int_1^{n-1} \frac{1}{t^2} \, dt \ = \ \left[-\frac{1}{t} \right]_1^{n-1} \ = \ -\left(\frac{1}{n-1} - 1 \right) \ = \ 1 - \frac{1}{n-1} \ \leqslant \ 1$$

- On en déduit, par transitivité :

$$0 \ \leqslant \ u_n - u_2 \ \leqslant \ \int_1^{n-1} \frac{1}{t^2} \, dt \ \leqslant \ 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \geqslant 3 : u_2 \ \leqslant \ u_n \ \leqslant \ 1 + u_2.}$$

- Par définition de la suite (u_n) :

$$u_2 \ = \ u_1 + \frac{1}{1^2 \, u_1} \ = \ 1 + \frac{1}{1 \times 1} \ = \ 2$$

On en déduit, avec l'encadrement précédent, pour tout $n \geqslant 3$:

$$2 \ \leqslant \ u_n \ \leqslant \ 3$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{En passant à la limite quand } n \text{ tend vers } +\infty \text{ dans l'encadrement précédent,} \\ \text{on obtient : } \ell \in [2, 3].\end{array}}$$

□

d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \ \leqslant \ \ell - u_p \ \leqslant \ \frac{1}{p-1}$$

Démonstration.
Soit $p \geqslant 2$.

- Soit $n > p$. D'après la question ***11.b)*** :

$$0 \ \leqslant \ u_n - u_p \ \leqslant \ \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} \, dt$$

- Or :

$$\int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} \, dt \ = \ \left[-\frac{1}{t} \right]_{p-1}^{n-1} \ = \ -\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{p-1} \right) \ = \ \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1}$$

Ainsi :

$$0 \ \leqslant \ u_n - u_p \ \leqslant \ \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{En passant à la limite quand } n \text{ tend vers } +\infty \text{ dans l'encadrement précédent,} \\ \text{on obtient : } 0 \ \leqslant \ \ell - u_p \ \leqslant \ \dfrac{1}{p-1}.\end{array}}$$

□

e) En déduire une fonction **Scilab** qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier N tel que u_N est une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près. Autrement dit, on souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|\ell - u_N| \leqslant 10^{-4}$$

- Or, d'après la question précédente : $\forall p \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \dfrac{1}{p-1}$.
- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{N-1} \leqslant 10^{-4}$.
  Si c'est le cas, on obtient alors par transitivité :

$$0 \leqslant \ell - u_N \leqslant 10^{-4}$$

- On propose alors le programme suivant :

```
1 function l = valeur_approchee()
2   n = 2
3   while 1 / (n-1) > 10 ^ (-4)
4     n = n + 1
5   end
6   l = suite(n)
7 endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début du script**

La variable n est initialisée à 2. En effet, on souhaite pouvoir effectuer le calcul : $\dfrac{1}{\mathtt{n}-1}$.

```
2   n = 2
```

- **Structure itérative**

Les lignes 3 à 5 consistent à déterminer le plus petit entier n tel que $\dfrac{1}{n-1} \leqslant 10^{-4}$. On doit donc comparer les valeurs successives de la suite $\left(\dfrac{1}{n-1}\right)_{n \geqslant 2}$ au réel 10^{-4} jusqu'à ce que $\dfrac{1}{n-1} \leqslant 10^{-4}$. Autrement dit, on doit comparer ces valeurs successives à 10^{-4} tant que $\dfrac{1}{n-1} > 10^{-4}$. Pour cela on met en place une structure itérative (boucle while) :

```
3   while 1 / (n-1) > 10 ^ (-4)
```

On met alors à jour en conséquence la variable n : on ajoute 1 pour signaler qu'on va comparer le terme suivant de la suite $\left(\dfrac{1}{n-1}\right)_{n \geqslant 2}$ à 10^{-4}.

```
4     n = n + 1
```

- **Fin du script**

À la fin de cette boucle, on est assuré que : $\dfrac{1}{n-1} \leqslant 10^{-4}$ (on itère tant que ce n'est pas le cas).
Il reste alors à calculer la valeur approchée de ℓ : on l'obtient par le calcul de u_n où n est la valeur obtenue à l'issue de cette boucle.

```
6   l = suite(n)
```

Commentaire

- Lorsqu'on écrit une boucle `while`, il est préférable de s'assurer en amont de sa terminaison. C'est bien le cas ici. En effet, la suite $\left(\dfrac{1}{n-1}\right)_{n\geqslant 2}$ est convergente de limite 0. Ce qui signifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|\frac{1}{n-1} - 0\right| < \varepsilon$$

Ainsi, quelle que soit la précision $\varepsilon > 0$ choisie au départ (ici 10^{-4}), on est toujours en mesure de trouver un rang n_0 à partir duquel on aura : $\dfrac{1}{n-1} < 10^{-4}$.

- On pouvait déterminer, sans utiliser de boucle, un entier N tel que u_N est une valeur approchée à 10^{-4} près de ℓ. Pour ce faire, on remarque :

$$\frac{1}{n-1} \leqslant 10^{-4} \ \Leftrightarrow\ n-1 \geqslant 10^4 \ \Leftrightarrow\ n \geqslant 10^4 + 1$$

L'entier $N = \lceil 10^4 + 1 \rceil$ convient.

□