DM1 vB correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : x \mapsto x^{2n+1} - x^{n+1} - 1$$

1. Étudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration.

- La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction polynomiale.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$f_n'(x) \ = \ (2n+1)\,x^{2n} - (n+1)\,x^n \ = \ x^n \big((2n+1)\,x^n - n - 1\big)$$

De plus, comme $x^n \geqslant 0$:

$$\begin{array}{rcll} f_n'(x) \geqslant 0 & \Leftrightarrow & (2n+1)\,x^n - n - 1 \geqslant 0 & \\ & \Leftrightarrow & (2n+1)\,x^n \geqslant n+1 & \\ & \Leftrightarrow & x^n \geqslant \dfrac{n+1}{2n+1} & \textit{(car } 2n+1>0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & n\,\ln(x) \geqslant \ln\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right) & \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \ln(x) \geqslant \dfrac{1}{n}\,\ln\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right) & \textit{(car } n>0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x \geqslant \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}} & \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{array}$$

- En notant $\alpha_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		α_n		$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f_n	-1	$\searrow$	$f_n(\alpha_n)$	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau :
  - × $f_n(0) \ = \ 0^{2n+1} - 0^{n+1} - 1 \ = \ -1$,
  - × Comme : $f_n(x) \ = \ x^{2n+1} - x^{n+1} - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{2n+1}$, alors : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

□

2. a) Montrer que la fonction f_n s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+$.
On note x_n l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question précédente, la fonction f_n est décroissante sur $[0, \alpha_n]$. Ainsi :

$$\forall x \in [0, \alpha_n], \quad f_n(x) \leqslant f_n(0) = -1$$

En particulier : $\forall x \in [0, \alpha_n]$, $f_n(x) < 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ ne s'annule pas sur } [0, \alpha_n].}$$

- D'après la question précédente, la fonction f_n est :
  × continue (car dérivable) sur $]\alpha_n, +\infty[$,
  × strictement croissante sur $]\alpha_n, +\infty[$.

  Ainsi la fonction f_n réalise une bijection de $]\alpha_n, +\infty[$ sur $f_n\big(]\alpha_n, +\infty[\big)$, avec :

$$f_n\big(]\alpha_n, +\infty[\big) = \Big]f_n(\alpha_n), \lim_{x \to +\infty} f_n(x)\Big[=]f_n(\alpha_n), +\infty[$$

- Or, comme démontré dans le point précédent : $f(\alpha_n) < 0$. D'où : $0 \in]f_n(\alpha_n), +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f_n \text{ s'annule une unique fois sur }]\alpha_n, +\infty[.}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, la fonction } f_n \text{ s'annule une unique fois sur } [0, +\infty[. \\ \text{On note } x_n \text{ ce point d'annulation.}\end{array}}$$

Commentaire

- L'énoncé débute avec la quantification de la variable n suivante : « Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ». Les propositions démontrées après l'introduction de cette variable sont donc démontrées **pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$ (aucune autre condition sur la variable n n'apparaît dans l'énoncé).
- On définit donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel x_n. Autrement dit, avec cette question, on définit **la suite** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

□

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord : $f_n(1) = 1^{2n+1} - 1^{n+1} - 1 = -1$
- On rappelle de plus, par définition de x_n : $f_n(x_n) = 0$.

Ainsi :

$$f_n(1) < f_n(x_n)$$

On note g_n la réciproque de f_n sur $]\alpha_n, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, la fonction g_n est strictement croissante sur $]f_n(\alpha_n), +\infty[$.
En l'appliquant de part et d'autre de l'inégalité, on obtient :

$$1 < x_n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ x_n > 1}$$

□

3. a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'une part :

$$\begin{array}{rcll} f_{n+1}(x_n) & = & (x_n)^{2(n+1)+1} - (x_n)^{(n+1)+1} - 1 & \\ & = & (x_n)^{2n+3} - (x_n)^{n+2} - 1 & \\ & = & (x_n)^2\, x^{2n+1} - (x_n)^{n+2} - 1 & \\ & = & (x_n)^2 \left((x_n)^{n+1} + 1\right) - (x_n)^{n+2} - 1 & \textit{(car, par définition de } x_n \textit{ :} \\ & & & (x_n)^{2n+1} - (x_n)^{n+1} - 1 = 0\textit{)} \\ & = & (x_n)^{n+3} + (x_n)^2 - (x_n)^{n+2} - 1 & \\ & = & (x_n)^{n+2}\,(x_n - 1) + (x_n - 1)(x_n + 1) & \\ & = & (x_n - 1)\left((x_n)^{n+2} + x_n + 1\right) & \end{array}$$

  Comme $x_n > 1$, on en déduit : $f_{n+1}(x_n) > 0$.
- On rappelle d'autre part, par définition de x_{n+1} : $f_{n+1}(x_{n+1}) \ = \ 0$.

Ainsi :

$$f_{n+1}(x_n) \ > \ f_{n+1}(x_{n+1})$$

En appliquant de part et d'autre de l'inégalité la fonction g_{n+1}, on obtient :

$$x_n \ > \ x_{n+1}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (x_n) \text{ est (strictement) décroissante.}}$$

Commentaire

- On rappelle que les propositions démontrées précédemment le sont pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- En particulier, on démontre en question ***2.a)*** que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n admet une bijection réciproque sur $]\alpha_n, +\infty[$ que l'on note g_n.
  Cette propriété est quantifiée universellement en n. Cette variable est donc muette. On pourrait par exemple remplacer toutes les occurences de la variable n par une variable m et la proposition resterait inchangée : pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_m admet une bijection réciproque sur $]\alpha_m, +\infty[$ que l'on note g_m.
- En appliquant cette proposition à $m = n + 1$, la fonction g_{n+1} est bien définie comme la bijection réciproque de la fonction f_{n+1} sur $]\alpha_{n+1}, +\infty[$.

Commentaire

- Cet exercice consiste en l'étude de la suite (x_n). On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite (x_n) mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$ sur $[0, +\infty[$

  On comprend alors que l'étude de (x_n) va passer par l'étude des propriétés de la fonction f_n.
- De cette définition, on tire la propriété : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \ f_m(x_m) = 0}$.
  Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite (x_n).
  On l'utilise dans cette question à la fois pour $m = n$ et pour $m = n + 1$.
- Comme la suite (x_n) est définie de manière implicite, on n'étudie pas la monotonie de (x_n) à l'aide de la différence $x_{n+1} - x_n$. Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :

  $$f_{n+1}(x_n) \ > \ f_{n+1}(x_{n+1})$$

  et de conclure : $x_n \ > \ x_{n+1}$ à l'aide d'une propriété de f_n. □

b) Que peut-on en conclure ?

Démonstration.
La suite (x_n) est :

× décroissante, d'après la question précédente,

× minorée par 1, d'après la question ***2.b)***.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (x_n) \text{ converge vers un réel } \ell \text{ tel que : } \ell \geqslant 1.}$$

Commentaire

- On rappelle que le passage à la limite est compatible avec les inégalités **larges**. En effet, si la suite (u_n) converge vers ℓ :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n > a \quad \Rightarrow \quad \ell \geqslant a$$

- On pourra retenir l'exemple classique de la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$:

  × d'une part : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{1}{n} > 0$

  × d'autre part : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \cancel{>} 0$

□

4. On note h la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$h : x \mapsto x(x-1)$$

Montrer que la fonction h réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$h(x) \ = \ x(x-1) \ = \ x^2 - x$$

La fonction h est donc dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale.

- Soit $x \in [1, +\infty[$.

$$h'(x) \ = \ 2x - 1$$

Comme $x > 1$, on en déduit : $h'(x) > 0$.
La fonction h est donc strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

- On en déduit que la fonction h est :

× continue (car dérivable) sur $[1, +\infty[$,

× strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, la fonction h réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $h([1, +\infty[)$ avec :

$$h([1, +\infty[) \ = \ \left[h(1), \lim_{x \to +\infty} h(x) \right[\ = \ [0, +\infty[$$

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ réalise une bijection de } [1, +\infty[\text{ sur } [0, +\infty[.}$$

□

5. a) (i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $(x_n)^n$ en fonction de h^{-1}.

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition de x_n :

$$\begin{aligned} 0 &= f_n(x_n) \\ &= (x_n)^{2n+1} - (x_n)^{n+1} - 1 \\ &= (x_n)^{n+1} \big((x_n)^n - 1 \big) - 1 \\ &= x_n \times (x_n)^n \big((x_n)^n - 1 \big) - 1 \\ &= x_n \, h\big((x_n)^n \big) - 1 \end{aligned}$$

- De plus :

$$\begin{aligned} x_n \, h\big((x_n)^n\big) - 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_n \, h\big((x_n)^n\big) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad h\big((x_n)^n\big) = \frac{1}{x_n} \qquad \textit{(car } x_n \neq 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad (x_n)^n = h^{-1}\left(\frac{1}{x_n}\right) \qquad \begin{array}{l}\textit{(par bijectivité de } h \textit{ sur } [1, +\infty[, \\ \textit{et car } (x_n)^n \in [1, +\infty[\ (*)\textit{)}\end{array} \end{aligned}$$

- Démontrons la proposition $(*)$: $(x_n)^n \in [1,+\infty[$.
  D'après la question ***2.b)*** : $x_n > 1$.
  Ainsi, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0,+\infty[$: $(x_n)^n > 1^n$. D'où :

$$(x_n)^n > 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } (x_n)^n \ = \ h^{-1}\left(\frac{1}{x_n}\right).}$$

□

(ii) En déduire que la suite $\big((x_n)^n\big)_{n\geqslant 1}$ converge.

Démonstration.

- D'après la question ***3.b)***, la suite (x_n) converge vers ℓ avec : $\ell \geqslant 1$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} \ = \ \frac{1}{\ell}$$

- De plus, d'après le théorème de la bijection, la fonction h^{-1} est continue sur $[0,+\infty[$ (donc continue en $\frac{1}{\ell}$). Ainsi, la suite $\left(h^{-1}\left(\frac{1}{x_n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} h^{-1}\left(\frac{1}{x_n}\right) \ = \ h^{-1}\left(\frac{1}{\ell}\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement, la suite } \big((x_n)^n\big)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } h^{-1}\left(\frac{1}{\ell}\right).}$$

□

b) Montrer alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.
Indication : on pourra procéder par l'absurde.

Démonstration.

- D'après la question ***3.b)***, on sait : $\ell \geqslant 1$.
- On procède alors par l'absurde pour montrer : $\ell = 1$.
  Supposons : $\ell > 1$.
  La suite (x_n) est :
  × décroissante,
  × vérifie : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$.
  On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \geqslant \ell$.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0,+\infty[$:

$$(x_n)^n \ \geqslant \ \ell^n$$

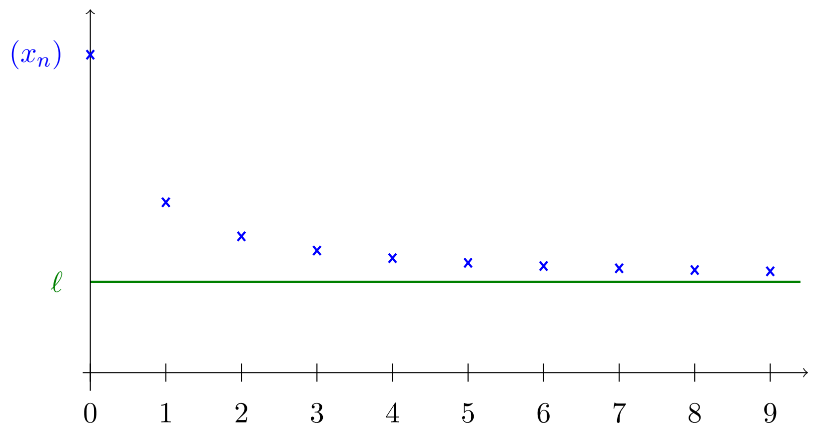
  On obtient :
  × $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(x_n)^n \ \geqslant \ \ell^n$,
  × comme $\ell > 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n = +\infty$
  Par théorème de comparaison, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = +\infty$.
  Ceci est absurde d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} x_n = 1.}$$

Commentaire

On peut visualiser sur un graphe l'implication suivante :

$$\left.\begin{array}{l} \times\ (x_n) \text{ décroissante,} \\ \times\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant \ell$$



□

c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = \varphi$, où φ est la solution de l'équation $h(x) = 1$ sur $[1, +\infty[$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\ell = 1$.
  Ainsi, d'après la question ***5.a)(ii)*** :

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n)^n \ = \ h^{-1}\left(\frac{1}{\ell}\right) \ = \ h^{-1}(1)$$

- On cherche alors à déterminer $\varphi = h^{-1}(1)$. Or :

$$\varphi = h^{-1}(1) \ \Leftrightarrow \ h(\varphi) = 1$$

  Le réel φ est donc solution de l'équation $h(x) = 1$ sur $[1, +\infty[$.
- D'après la question ***4.***, la fonction h réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
  Or : $1 \in [0, +\infty[$.
  On en déduit que l'équation $h(x) = 1$ admet une unique solution.
  Ainsi φ est bien défini et unique.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Finalement : } \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n \ = \ \varphi, \\ \text{où } \varphi \text{ est l'unique solution de l'équation } h(x) = 1 \text{ sur } [1, +\infty[. \end{array}}$$

Commentaire

On pouvait même calculer φ explicitement :

- Tout d'abord, soit $x \in [1, +\infty[$:

$$h(x) = 1 \Leftrightarrow x(x-1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

- On note $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par : $P(X) = X^2 - X - 1$.
  Calculons le discriminant du polynôme P :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$$

- Ainsi, le polynôme P admet 2 racines :

$$r_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

  Or φ est la solution **positive** de l'équation $h(x) = 1$ (car h réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$).
  On en déduit :

$$\varphi = r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Ce nombre φ est parfois appelé « nombre d'or ».

$\square$

6. a) Déterminer un équivalent de $\big(\ln(x_n)\big)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition de x_n :

$$(x_n)^{2n+1} = (x_n)^{n+1} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (2n+1)\,\ln(x_n) = \ln\big(1 + (x_n)^{n+1}\big)$$
(par bijectivité de ln *sur* $]0, +\infty[$ *et car :* $x_n > 0$*)*

- De plus, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n)^n = \varphi$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} 1 + (x_n)^{n+1} &= 1 + \varphi \\ &= \varphi^2 \qquad (*) \end{aligned}$$

- Détaillons $(*)$. Par définition de φ :

$$h(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi^2 = \varphi + 1$$

- Enfin, par continuité de la fonction ln sur $]0, +\infty[$:

$$\lim_{n \to +\infty} \ln\big(1 + (x_n)^{n+1}\big) = \ln(\varphi^2) = 2\,\ln(\varphi)$$

$$\boxed{\text{Comme } 2\,\ln(\varphi) \neq 0\text{, on en déduit : } \ln\big(1 + (x_n)^{n+1}\big) \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\,\ln(\varphi).}$$

- Ainsi :
$$(2n+1)\ \ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ \ln(\varphi)$$
D'où :
$$\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ \ln(\varphi)}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\cancel{2}\ \ln(\varphi)}{\cancel{2}\,n}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(\varphi)}{n}.}$$

Commentaire

Si l'on ne remarquait pas la relation $\varphi^2 = \varphi + 1$, on obtenait l'équivalent :
$$\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(1+\varphi)}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(1+\varphi)}{2n}$$
Celui-ci est tout à fait correct et aurait sans doute été accepté par le jury. □

b) En déduire : $x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(\varphi)}{n}$.

Démonstration.

- D'une part, d'après la question précédente : $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(\varphi)}{n}$.
- D'autre part : $\ln(x_n) = \ln\big(1 + (x_n - 1)\big)$.
  Or, d'après la question ***5.b)*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - 1 = 0$. Ainsi :
$$\ln\big(1 + (x_n - 1)\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n - 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(\varphi)}{n}.}$$

Commentaire

L'équivalent est imposé pour cette question. Si l'on n'avait pas exploité la relation $\varphi^2 = \varphi+1$ en question précédente, elle était indispensable pour conclure cette dernière question. □