

DM1 vA correction

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

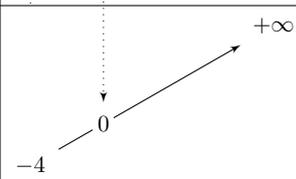
1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n .

Démonstration.

- La fonction f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$f'_n(x) = n x^{n-1} + 18x > 0$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0	u_n	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	0	$+$	
Variations de f			

- La fonction f_n est :
 - × continue sur $[0, +\infty[$,
 - × strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
 Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f_n([0, +\infty[)$. Or :

$$f_n([0, +\infty[) = [f_n(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)[= [-4, +\infty[$$

- Comme $0 \in [-4, +\infty[$, alors 0 admet un unique antécédent $u_n \in [0, +\infty[$ par la fonction f_n .
- Enfin, comme $f_n(0) = -4 \neq 0$, on en déduit : $u_n \neq 0$.

L'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une unique solution strictement positive (notée u_n).

(on pouvait aussi citer le théorème de la bijection directement sur $]0, +\infty[$)

Commentaire

- L'énoncé débute avec la quantification de la variable n suivante : « Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ». Les propositions démontrées après l'introduction de cette variable sont donc démontrées **pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$ (aucune autre condition sur la variable n n'apparaît dans l'énoncé). C'est le cas de cette question mais aussi des questions **2.a)** (où l'on considère f_n et f_{n+1}) et **2.b)** (où l'on considère la quantité $f_n(u_{n+1})$).
- En particulier, dans cette question, on démontre qu'à **tout** $n \in \mathbb{N}^*$ on peut associer une valeur u_n . C'est donc une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qu'on définit ici et pas seulement une unique quantité u_n . □

b) Calculer u_1 et u_2 .

Démonstration.

- Par définition, u_1 est l'unique solution strictement positive de l'équation $f_1(x) = 0$ où f_1 est la fonction $f_1 : x \mapsto x + 9x^2 - 4$. Notons $P(X) = 9X^2 + X - 4$ le polynôme correspondant. Ce polynôme de degré 2 admet pour discriminant : $\Delta = 1 - 4 \times (-4) \times 9 = 1 + 144 = 145$. Ainsi, P admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{145}}{18} > 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{145}}{18} < 0$$

En effet, $\sqrt{145} > \sqrt{144} = 12$.

On en déduit : $u_1 = \frac{-1 + \sqrt{145}}{18}$.

- Par définition, u_2 est l'unique solution strictement positive de l'équation $f_2(x) = 0$ où f_2 est la fonction $f_2 : x \mapsto x^2 + 9x^2 - 4$. Notons $Q(X) = 10X^2 - 4$ le polynôme correspondant. On remarque :

$$Q(X) = (\sqrt{10}X)^2 - 2^2 = (\sqrt{10}X - 2)(\sqrt{10}X + 2)$$

Ainsi, Q a pour racines :

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{10}} > 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2}{\sqrt{10}} < 0$$

On en déduit : $u_2 = \frac{2}{\sqrt{10}}$.

□

c) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons tout d'abord :

× $f_n(0) = -4 < 0$,

× $f_n(u_n) = 0$,

× $f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$.

On a donc : $f_n(0) < f_n(u_n) < f_n\left(\frac{2}{3}\right)$.

- Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $f_n^{-1} : [-1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est strictement croissante. En appliquant f_n^{-1} de part et d'autre de l'inégalité, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} f_n^{-1}(f_n(0)) & < & f_n^{-1}(0) & < & f_n^{-1}\left(f_n\left(\frac{2}{3}\right)\right) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & < & u_n & < & \frac{2}{3} \end{array}$$

On a bien démontré : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

□

2. a) Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= (x^{n+1} + 9x^2 - 4) - (x^n + 9x^2 - 4) = x^{n+1} + \cancel{9x^2} - \cancel{4} - x^n - \cancel{9x^2} + \cancel{4} \\ &= x^{n+1} - x^n = x^n (x - 1) \end{aligned}$$

Or :

× comme $0 < x < 1$ alors $x - 1 < 0$.

× comme $0 < x < 1$, on obtient, en multipliant de part et d'autre par $x^n > 0$: $0 < x^{n+1} < x^n$.

On en déduit : $\forall x \in]0, 1[, f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$.

□

b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n) .

Démonstration.

• D'après la question 1.c :

$$0 < u_{n+1} < \frac{2}{3} < 1$$

• En appliquant la formule de la question précédente en $x = u_{n+1} \in]0, 1[$, on obtient :

$$\begin{aligned} f_n(u_{n+1}) &> f_{n+1}(u_{n+1}) \\ &\quad \parallel \\ &0 \quad (\text{par définition}) \end{aligned}$$

$$f_n(u_{n+1}) > 0$$

• Or $f_n(u_n) = 0$. On en déduit : $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$.

Par application de la fonction f_n^{-1} , strictement croissante, on obtient : $u_{n+1} > u_n$.

Ainsi, (u_n) est strictement croissante.

Commentaire

- Cet exercice consiste en l'étude de la suite (u_n) . On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite (u_n) mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$

On comprend alors que l'étude de (u_n) va passer par l'étude des propriétés de la fonction f_n .

- De cette définition, on tire la propriété : $\forall m \in \mathbb{N}^*, f_m(u_m) = 0$.

Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite (v_n) .

On l'utilise dans cette question à la fois pour $m = n$ et pour $m = n + 1$.

- Comme la suite (u_n) est définie de manière implicite, on n'étudie pas la monotonie de (u_n) à l'aide de la différence $u_{n+1} - u_n$. Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :

$$f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$$

et de conclure : $u_{n+1} > u_n$ à l'aide d'une propriété de f_n .

□

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

Démonstration.

D'après les questions précédentes, la suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$.

On en déduit que la suite (u_n) est convergente et que sa limite ℓ est telle que : $0 \leq \ell \leq \frac{2}{3}$. \square

3. a) Déterminer la limite de u_n^n lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

• D'après la question 1.c) : $0 < u_n < \frac{2}{3}$.

La fonction élévation à la puissance n étant strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit :

$$0 < u_n^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

• Or :

$$\times \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0,$$

$$\times \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ (car } \frac{2}{3} \in]-1, 1[).$$

Ainsi, par le théorème d'encadrement, la suite (u_n^n) est convergente et de limite 0. \square

b) Donner enfin la valeur de ℓ .

Démonstration.

• Par définition de u_n , $f_n(u_n) = 0$. Ainsi : $u_n^n + 9 u_n^2 - 4 = 0$ ou encore :

$$9 u_n^2 = 4 - u_n^n$$

• Or :

$$\times \lim_{n \rightarrow +\infty} 9 u_n^2 = 9 \ell^2 \text{ car } (u_n) \text{ converge vers } \ell.$$

$$\times \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - u_n^n = 4 \text{ car } (u_n^n) \text{ converge vers } 0.$$

On en déduit : $9 \ell^2 = 4$. Enfin :

$$\begin{aligned} 9 \ell^2 = 4 &\Leftrightarrow \ell^2 = \frac{4}{9} \\ &\Leftrightarrow \ell = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \quad \text{OU} \quad \ell = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Comme $\ell \geq 0$, on en déduit que (u_n) converge vers $\ell = \frac{2}{3}$.

Commentaire

C'est encore une fois la propriété de définition des termes de la suite (u_n) qui est utilisée ici ($\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = 0$). On insiste sur le fait que cette propriété est fondamentale pour l'étude de la suite implicite (u_n) . \square

4. Montrer que la série de terme général $\frac{2}{3} - u_n$ est convergente.

Démonstration.

- Comme $f_n(u_n) = 0$, on a :

$$u_n^n = 4 - 9u_n^2 = (2 - 3u_n)(2 + 3u_n) = 3 \left(\frac{2}{3} - u_n \right) (2 + 3u_n)$$

On en déduit :

$$\frac{2}{3} - u_n = \frac{1}{3} \frac{u_n^n}{2 + 3u_n}$$

- D'après la question 3.a) : $0 \leq u_n^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

D'autre part, comme $u_n \geq 0$ alors $2 + 3u_n \geq 2$ et ainsi : $0 \leq \frac{1}{2 + 3u_n} \leq \frac{1}{2}$.

On en déduit, en multipliant ces inégalités membre à membre :

$$0 \leq \frac{1}{3} \frac{u_n^n}{2 + 3u_n} \leq \frac{1}{3} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

||

$$\frac{2}{3} - u_n$$

- On a alors :

$$\times \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{2}{3} - u_n \leq \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

× la série $\sum \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ est, à multiplication par une constante non nulle près, une série géométrique de raison $\frac{2}{3} \in] - 1, 1[$. Elle est donc convergente.

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \left(\frac{2}{3} - u_n\right)$ est convergente.

Commentaire

On utilise encore et toujours, en début de question, la propriété de définition des termes de la suite (u_n) , à savoir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(u_n) = 0$.

□