

## DM5

1. On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et on considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

a) Vérifier que l'on a  $A^2 \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$  et calculer  $A^3$ .

*Démonstration.*

• Tout d'abord :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2 \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}$$

• Ensuite :

$$A^3 = A A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

b) Déterminer une base  $(a)$  de  $\text{Ker}(f)$  ainsi qu'une base  $(b, c)$  de  $\text{Im}(f)$ .

*Démonstration.*

• Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Notons  $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}(f) &\iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff AU = 0_{\mathcal{M}_3,1(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + y = -2z \\ -y = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} 2x = -2z \\ -y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \text{ ET } y = 0\} \\ &= \{(-z, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z \cdot (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((-1, 0, 1)) \end{aligned}$$

On a :  $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(a)$  avec  $a = (-1, 0, 1)$ .

La famille  $\mathcal{F} = ((-1, 0, 1))$  est :

× génératrice de  $\text{Ker}(f)$ .

× libre car constituée uniquement d'un vecteur  $a \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ .

La famille  $(a)$  est une base de  $\text{Ker}(f)$ .

### Commentaire

- On a :  $\text{Vect}((-1, 0, 1)) = \text{Vect}((1, 0, -1))$ . On aurait aussi bien pu choisir :  $a = (1, 0, -1)$ .
- De manière générale, si  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ , alors  $\text{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3$ . On en déduit :

$$\dim(\text{Ker}(f)) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

Plusieurs cas se présentent alors :

×  $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$ . Ceci équivaut à :  $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ .

Dans ce cas, l'endomorphisme  $f$  est injectif.

Comme  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ , espace vectoriel de **dimension finie**, on en déduit que  $f$  est bijectif. L'application  $f$  est donc un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

×  $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ .

×  $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$ .

×  $\dim(\text{Ker}(f)) = 3$ . Comme  $\text{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3$  on en déduit :  $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$ .

Ainsi :  $\forall u \in \mathbb{R}^3, f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$  et donc :  $f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ .

- Il est important de ne pas confondre  $\mathbb{R}^3$  (l'ensemble des triplets de réels) et  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  (l'ensemble des matrices colonnes à coefficients réels) et ce même s'il y a une bijection évidente entre ces deux ensembles. Une telle confusion sera systématiquement sanctionnée aux concours. On a notamment :

$$\text{Ker}(f) \neq \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -z \text{ ET } y = 0 \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- D'autre part, comme  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$$

Or :

$$\times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_1)) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et donc } f(e_1) = 2e_1 - e_2 - e_3 = (2, -1, -1).$$

$$\times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_2)) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et donc } f(e_2) = e_1 - e_2 = (1, -1, 0).$$

$$\times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_3)) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et donc } f(e_3) = 2e_1 - e_2 - e_3 = (2, -1, -1).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}((2, -1, -1), (1, -1, 0), (2, -1, -1)) \\ &= \text{Vect}((2, -1, -1), (1, -1, 0)) \end{aligned}$$

On a :  $\text{Im}(f) = \text{Vect}((2, -1, -1), (1, -1, 0))$  avec  $b = (2, -1, -1)$ , et  $c = (1, -1, 0)$ .

La famille  $\mathcal{F} = ((2, -1, -1), (1, -1, 0))$  est :

- × génératrice de  $\text{Im}(f)$ .
- × libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

La famille  $(b, c)$  est une base de  $\text{Im}(f)$ .

### Commentaire

- Rappelons que pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, si les coordonnées du triplet  $(x, y, z)$  sont nulles hormis la  $i^{\text{ème}}$  égale à 1 ( $(0, 1, 0)$  par exemple), l'effet du produit de matrices précédent est de sélectionner la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $A$ .

- Par ailleurs, rappelons que par définition, la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{matrix}$$

est la concaténation des vecteurs colonnes représentatifs des vecteurs  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$ , et  $f(e_3)$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Ainsi, la lecture de cette matrice nous fournit directement les égalités :

- ×  $f(e_1) = 2e_1 - e_2 - e_3 = (2, -1, -1)$ .
- ×  $f(e_2) = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ .
- ×  $f(e_3) = 2e_1 - e_2 - e_3 = (2, -1, -1)$ .

□

c) Montrer que  $\text{Im}(f^2) = \text{Ker}(f)$ .

*Démonstration.*

- Tout d'abord :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^2 = A^2$ .
- D'après la question 1. :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- On en déduit, par définition de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2)$  :

$$\times f(e_1) = e_1 - e_3 = (1, 0, -1).$$

$$\times f(e_2) = e_1 - e_3 = (1, 0, -1).$$

$$\times f(e_3) = e_1 - e_3 = (1, 0, -1).$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f^2) &= \text{Vect}(f^2(e_1), f^2(e_2), f^2(e_3)) \\ &= \text{Vect}((1, 0, -1), (1, 0, -1), (1, 0, -1)) = \text{Vect}((1, 0, -1)) = \text{Ker}(f) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Im}(f^2) = \text{Ker}(f)}$$

### Commentaire

- Grâce au résultat de cette question, on retrouve en particulier :  $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ .

On a même mieux :

$$\text{Im}(f^2) \subset \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$$

Démontrons cette équivalence.

$$\begin{aligned} f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^3, f^3(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^3, f(f^2(x)) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^3, f^2(x) \in \text{Ker}(f) \\ &\Leftrightarrow \text{Im}(f^2) \subset \text{Ker}(f) \end{aligned}$$

La dernière équivalence provient du fait que :  $\text{Im}(f^2) = \{f^2(x) \mid x \in \mathbb{R}^3\}$ .

- On pouvait aussi déterminer, pour tout  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ ,  $f^2(e_i)$  par calcul. Par exemple :

$$\begin{aligned} &f^2(e_1) \\ &= f(f(e_1)) \\ &= f(2e_1 - e_2 - e_3) \\ &= 2 \cdot f(e_1) - f(e_2) - f(e_3) && \text{(car } f \text{ est linéaire)} \\ &= 2 \cdot (2e_1 - e_2 - e_3) - (e_1 - e_2) - (2 \cdot e_1 - e_2 - e_3) && \text{(d'après la question 1.b)} \\ &= (4 \cdot e_1 - e_1 - 2 \cdot e_1) + \cancel{(-2 \cdot e_2 + e_2 + e_2)} + (-2 \cdot e_3 + e_3) \\ &= e_1 - e_3 \end{aligned}$$

Dans la suite, on considère un endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que :  $g^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$  et  $g^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ , ce qui signifie que  $g \circ g$  n'est pas l'endomorphisme nul, mais que  $g \circ g \circ g$  est l'endomorphisme nul.

3. Que peut-on en déduire sur  $M$  la matrice représentative de  $g$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  ?

*Démonstration.*

- Tout d'abord :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g^2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g))^2 = M^2$ .
- De même :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g^3) = M^3$ .
- Enfin :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ .

$$\boxed{\text{On en déduit : } M^2 \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \text{ et } M^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

**Commentaire**

- L'endomorphisme  $g$  est tel que :  $g^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$  et  $g^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ . On dit qu'il est **nilpotent** d'indice 3. Par définition, l'indice de nilpotence (d'un endomorphisme nilpotent !) est le plus petit entier  $n$  tel que :  $g^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ .
- Dans cette question, on démontre :

$$\begin{array}{l} \text{L'endomorphisme } f \text{ est} \\ \text{nilpotent d'indice 3} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{La matrice carrée } M \text{ est} \\ \text{nilpotente d'indice 3} \end{array}$$

où  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

Ce résultat est une équivalence. Le sens réciproque se démontre à l'aide de la passerelle matrice endomorphisme (bijection réciproque de l'isomorphisme de représentation). □

On se propose maintenant de montrer :  $\text{Im}(g^2) = \text{Ker}(g)$ .

4. a) Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de  $g$ .

*Démonstration.*

D'après l'énoncé :  $g^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ .

On en déduit que le polynôme  $P(X) = X^3$  est un polynôme annulateur de l'endomorphisme  $g$ .

Ainsi :  $\text{Sp}(g) \subset \{\text{racines de } P\}$ .

La seule valeur propre possible de  $g$  est 0. □

b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement la seule valeur propre de  $g$ .

*Démonstration.*

- Rappelons tout d'abord :

$$0 \text{ est valeur propre de } g \Leftrightarrow g - 0 \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^3} \text{ n'est pas injectif}$$

$$\Leftrightarrow g \text{ n'est pas bijectif} \quad (\text{car } \mathbb{R}^3 \text{ est de dimension finie})$$

- On procède par l'absurde.

Supposons que  $g$  est bijectif. Alors, en composant par  $f^{-1}$  de part et d'autre de l'égalité fournie par l'énoncé, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1} \circ f^3 & = & f^{-1} \circ 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} \\ \parallel & & \parallel \\ f^2 & & 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} \end{array}$$

Ceci contredit l'hypothèse de l'énoncé.

On en conclut que  $g$  n'est pas bijectif. Ainsi, 0 est bien valeur propre de  $g$ . D'après la question précédente, c'est la seule valeur propre de  $g$ .

**Commentaire**

- De manière générale, on peut démontrer, en procédant comme dans les questions 4.a) et 4.b) que les endomorphismes possèdent 0 comme unique valeur propre.
- En particulier, un endomorphisme nilpotent n'est jamais bijectif. □

c) En déduire, toujours en raisonnant par l'absurde, que  $g$  n'est pas diagonalisable.

*Démonstration.*

On procède par l'absurde.

- Supposons que  $g$  est diagonalisable. Il existe alors une base  $\mathcal{B}'$  dans laquelle la représentation matricielle de  $g$  est une matrice diagonale et dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de  $g$ .
- Par la formule de changement de base, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) &= P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) \times (P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}})^{-1} \\ \parallel & \qquad \qquad \qquad \parallel \\ M &= P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \times (P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}})^{-1} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Par suite :  $M^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \times 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$  ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.

Ainsi,  $g$  n'est pas diagonalisable.

**Commentaire**

- On a présenté ici une démonstration axée endomorphisme. On aurait aussi pu faire une démonstration axée matrice carrée. En effet, rappelons :

$$g \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow M \text{ est diagonalisable}$$

où  $M$  est une matrice représentative de l'endomorphisme  $g$ . Ainsi, on peut toujours se ramener à un problème de diagonalisabilité des matrices carrées.

- Détaillons ce procédé.

On procède par l'absurde.

Supposons que  $g$  est diagonalisable. **On en déduit alors que  $M$  l'est.**

Il existe donc une matrice  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible telle que :

$$M = PDP^{-1}$$

où  $D$  est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de  $M$ . Comme  $M$  a pour seule valeur propre 0 :  $D = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ . Et ainsi :

$$M = P 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Par suite :  $M^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \times 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$  ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.

- Cette dernière démonstration a l'avantage de pouvoir être utilisée que l'exercice soit axé sur les endomorphismes ou sur les matrices carrées. Il est vivement conseillé de la connaître : si cette démonstration n'apparaît pas comme résultat dans le programme officiel, elle est présente à chaque session de concours. □

5. a) Justifier qu'il existe un vecteur  $u$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $g^2(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ .

*Démonstration.*

Par hypothèse :  $g^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ . Il existe donc  $u \in \mathbb{R}^3$  tel que :  $g^2(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ . □

b) Montrer que  $(u, g(u), g^2(u))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , que l'on notera  $\mathcal{B}'$ .

*Démonstration.*

• Démontrons que la famille  $(u, g(u), g^2(u))$  est libre.

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ .

Supposons :  $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot g(u) + \lambda_3 \cdot g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$  (\*).

× Par linéarité de  $g^2$ , on obtient, en appliquant  $g$  de part et d'autre de l'égalité :

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 \cdot g^2(u) + \lambda_2 \cdot \cancel{g^3(u)} + \lambda_3 \cdot \cancel{g^4(u)} & = & g^2(0_{\mathbb{R}^3}) \\ \parallel & & \parallel \\ \lambda_1 \cdot g^2(u) & & 0_{\mathbb{R}^3} \end{array}$$

En effet, comme  $g^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$  alors  $g^4 = g \circ 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ .

Et en particulier :  $g^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$  et  $g^4(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ .

Comme  $\lambda_1 \cdot g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$  et  $g^2(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ , alors :  $\lambda_1 = 0$ .

× L'égalité (\*) se réécrit alors :  $\lambda_2 \cdot g(u) + \lambda_3 \cdot g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ .

En appliquant  $g$  de part et d'autre, on obtient alors :

$$\lambda_2 \cdot g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

On en déduit alors :  $\lambda_2 = 0$ .

× L'égalité (\*) se réécrit alors :  $\lambda_3 \cdot g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ .

On en conclut :  $\lambda_3 = 0$ .

Ainsi, la famille  $(u, g(u), g^2(u))$  est bien libre.

• La famille  $\mathcal{F} = (u, g(u), g^2(u))$  est :

× libre.

× telle que :  $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ .

Ainsi, la famille  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

□

c) Donner la matrice  $N$  de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

*Démonstration.*

Nommons :  $e'_1 = u$ ,  $e'_2 = g(u)$  et  $e'_3 = g^2(u)$ .

Il s'agit de déterminer l'image de la base  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  par l'application  $g$ .

×  $g(e'_1) = g(u) = e'_2$ . On en déduit :  $\text{Mat}_{(e'_1, e'_2, e'_3)}(g(e'_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

×  $g(e'_2) = g(g(u)) = e'_3$ . On en déduit :  $\text{Mat}_{(e'_1, e'_2, e'_3)}(g(e'_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

×  $g(e'_3) = g(g^2(u)) = g^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ . On en déduit :  $\text{Mat}_{(e'_1, e'_2, e'_3)}(g(e'_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Ainsi :  $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

□

- d) Déterminer  $\text{Im}(g)$  et donner sa dimension. En déduire une base de  $\text{Ker}(g)$ .  
Pour finir, déterminer  $\text{Im}(g^2)$  puis conclure.

*Démonstration.*

- Tout d'abord, comme  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\begin{aligned} \text{Im}(g) &= \text{Vect}(g(e'_1), g(e'_2), g(e'_3)) \\ &= \text{Vect}(e'_2, e'_3, 0_{\mathbb{R}^3}) && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \text{Vect}(g(u), g^2(u)) && \text{(par définition des éléments de } \mathcal{B}' \text{)} \end{aligned}$$

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}(g(u), g^2(u))$$

- La famille  $(g(u), g^2(u))$  est :
  - × libre car c'est une sous-famille de  $\mathcal{B}'$  qui est libre en tant que base de  $\mathbb{R}^3$ .
  - × génératrice de  $\text{Im}(g)$ .

On en déduit que la famille  $(g(u), g^2(u))$  est une base de  $\text{Im}(g)$ .  
Et ainsi :  $\dim(\text{Im}(g)) = \text{Card}((g(u), g^2(u))) = 2$ .

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{rcc} \dim(\mathbb{R}^3) & = & \dim(\text{Ker}(g)) + \dim(\text{Im}(g)) \\ \parallel & & \parallel \\ 3 & & 2 \end{array}$$

$$\text{Ainsi : } \dim(\text{Ker}(g)) = 1.$$

- Par ailleurs :  $g(e'_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ . Ce qui signifie :  $e'_3 \in \text{Ker}(g)$ . On a alors :

$$\text{Vect}(e'_3) \subset \text{Ker}(g)$$

Or, comme  $e'_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$  :  $\dim(\text{Vect}(e'_3)) = 1$ . Et ainsi :

$$\dim(\text{Vect}(e'_3)) = 1 = \dim(\text{Ker}(g))$$

$$\text{On en conclut : } \text{Ker}(g) = \text{Vect}(e'_3).$$

- Enfin, de la même manière que précédemment :

$$\begin{aligned} \text{Im}(g^2) &= \text{Vect}(g^2(e'_1), g^2(e'_2), g^2(e'_3)) \\ &= \text{Vect}(g^2(u), g^2(g(u)), g^2(g^2(u))) \\ &= \text{Vect}(e'_3, 0_{\mathbb{R}^3}, 0_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(e'_3) \end{aligned}$$

$$\text{Im}(g^2) = \text{Vect}(e'_3)$$

Cela permet de conclure l'exercice :  $\text{Im}(g^2) = \text{Vect}(e'_3) = \text{Ker}(g)$ .

□