# DM5

***1.*** On note $\mathscr{B} = (e_1; e_2; e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

***a)*** Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer $A^3$.

***b)*** Déterminer une base $(a)$ de $\mathrm{Ker}\,(f)$ ainsi qu'une base $(b, c)$ de $\mathrm{Im}\,(f)$.

***c)*** Montrer que $\mathrm{Im}\,\left(f^2\right) = \mathrm{Ker}\,(f)$.
Dans la suite, on considère un endomorphisme $g$ de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$, ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul.

***d)*** Que peut-on en déduire sur $M$ la matrice représentative de $g$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\mathrm{Im}\,\left(g^2\right) = \mathrm{Ker}\,(g)$.

***2.*** ***a)*** Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de $g$.

***b)*** Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement la seule valeur propre de $g$.

***c)*** En déduire, toujours en raisonnant par l'absurde, que $g$ n'est pas diagonalisable.

***3.*** ***a)*** Justifier qu'il existe un vecteur $u$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2\,(u) \neq 0$.

***b)*** Montrer que $\left(u, g\,(u)\,, g^2\,(u)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ , que l'on notera $\mathscr{B}'$.

***c)*** Donner la matrice $N$ de $g$ dans la base $\mathscr{B}'$.

***d)*** Déterminer $\mathrm{Im}\,(g)$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\mathrm{Ker}\,(g)$.
Pour finir, déterminer $\mathrm{Im}\,\left(g^2\right)$ puis conclure.