DM4

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.
Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse 0, 1, ..., n.
Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).
On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. ***a)*** Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, X_n possède une espérance et une variance, puis déterminer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

2. On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que Y est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $[Y = n]$ à l'aide des variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n.

b) En déduire que la loi de Y est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

c) Vérifier par le calcul que l'on a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = n]) = 1$.

d) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?

3. ***a)*** Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

b) En déduire : $\forall j \geqslant 2,\ \ln(j) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{j-1} \dfrac{1}{k} \leqslant \ln(j) + 1 - \dfrac{1}{j}$.

c) Conclure alors : $\sum\limits_{k=1}^{j-1} \dfrac{1}{k} \underset{j\to+\infty}{\sim} \ln(j)$.

4. On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Déterminer pour tout $i \geqslant j$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j])$.

b) Établir :

$$\forall i \leqslant j-1, \quad \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j]) = \frac{i+1}{j(j+1)}$$

c) Écrire, pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 2, la probabilité $\mathbb{P}([Z = j])$ comme une somme finie.

d) La variable aléatoire Z possède-t-elle une espérance ?

5. Informatique
On rappelle qu'en **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, 'uin ', a, b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme à valeurs dans $[\![a, b]\!]$.

a) Écrire des commandes **Scilab** calculant et affichant la valeur de l'abscisse du mobile après son $n^{\text{ème}}$ déplacement lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.

b) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette d'afficher dans cet ordre les valeurs prises par les variables aléatoires Y et Z.

```
n = 0
a = 0
while a < 2
  n = n + 1
  if grand(1, 1, 'uin', 0, n) == 0 then
    a = a + 1
    if a == 1 then
      y = n
    end
  end
end
disp(..., 'y =')
disp(..., 'z =')
```