DM3 vB

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie I : Réduction simultanée de A et B

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

2. En déduire une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, de deuxième ligne $(-1\ \ 1\ \ 1)$, telle que $A = P\,D\,P^{-1}$, et calculer P^{-1}.

3. Calculer la matrice $C = P^{-1}\,B\,P$ et vérifier que C est diagonale.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application $f : E \to E$ qui, à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe $f(M) = AM - MB$.

1. Donner la dimension de E.

2. Vérifier que f est un endomorphisme de E.

3. Soit $M \in E$. On note $N = P^{-1}M\ P$, où P est définie en **I.2**.

- ***a)*** Montrer : $M \in \ker(f) \Leftrightarrow DN = NC$.
- ***b)*** Déterminer les matrices N carrées d'ordre trois telles que : $DN = NC$.
- ***c)*** Montrer que l'ensemble des matrices N carrées d'ordre trois telles que $DN = NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.

4. ***a)*** En déduire la dimension de $\ker(f)$, puis la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

- ***b)*** Donner au moins un élément non nul de $\ker(f)$ et donner au moins un élément non nul de $\mathrm{Im}(f)$.